

8. Verschränkte Zustände, EPR und Bell

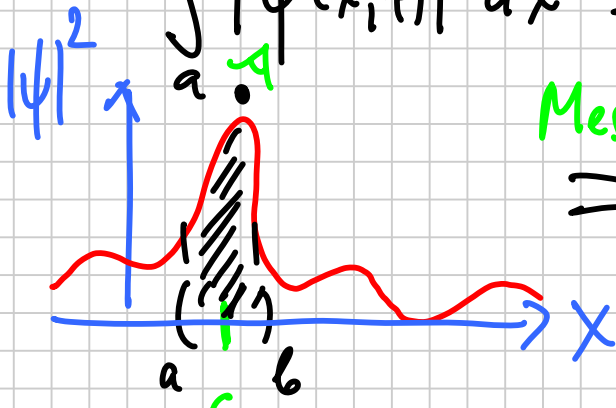
vor 100 Jahren: QM (Bohr-1913) $\rightarrow$ Beste Theorie!

? Unbestimmtheit: QM - $|\psi(x,t)|^2$ Statistische Interpretation

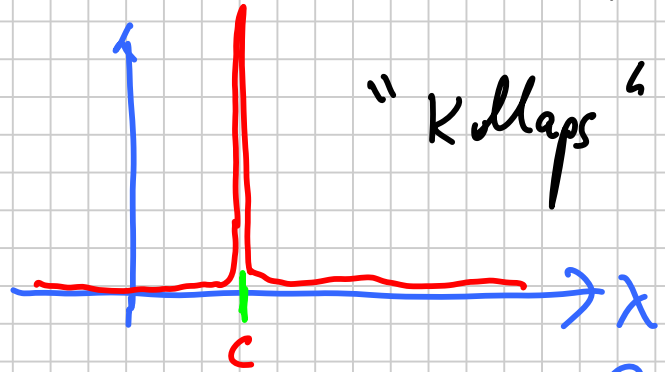
Messung: $a?$ $\Rightarrow \hat{A}$ -operator zu "a" 2

$$\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle \Rightarrow a_n \text{ mit } |\psi_n|^2$$

$$\int |\psi(x,t)|^2 dx \Rightarrow \text{Wahrscheinlichkeit in } (a, b)$$



Messung
 $\Rightarrow$



Frage: Wo war das Teilchen vor der Messung?

1) "Realistische Position" (Einstein)

$\Rightarrow$ Das Teilchen war am Punkt C UND

QM ist eine unvollständige Theorie!

$|\psi\rangle$ zeigt nicht alle Aspekte + zusätzliche Information
(Verborgene Variablen - λ)

2) "Orthodoxe Position" (Kopenhagener Interpretation)

$\Rightarrow$ Das Teilchen war nirgendwo!

P. Jordan: "wir zwingen das Teilchen, einen bestimmten Ort einzunehmen"

3) "Agnostische Position"

$\Rightarrow$ Es gibt keine Antwort.

Antwort: John Bell (1964)

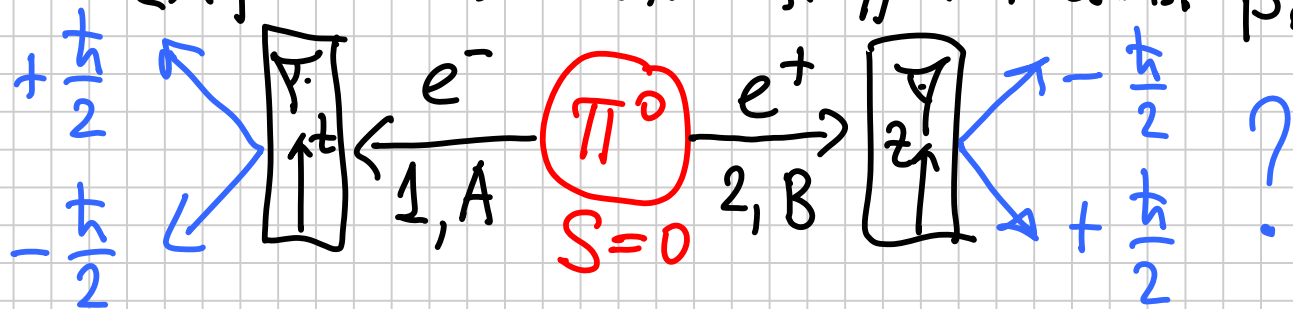
8.1 EPR - Paradoxon

Einstein, Podolsky, Rosen ~ 1935

$\Rightarrow$ QM: "Spukhafte Fernwirkungen"?

Gedankenexperiment (D. Bohm):

Zerfall eines neutralen π^0 -Mesons: Elektron + Positron



Singulettzustand: $e^- + e^+$:

$$\psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$e^- \quad e^+ \qquad \qquad e^- \quad e^+$

Nichtlokalität:

Messung: $A: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
oder: $A: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

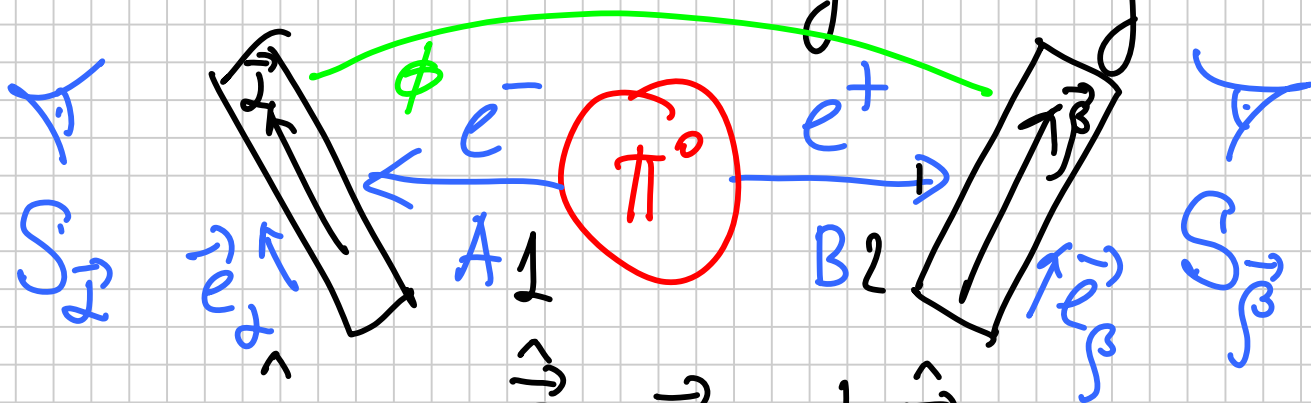
Instantan!

EPR ?

$$\Delta r \sim 1 \text{ km}$$

$$\Delta t \sim 1 \text{ Jahr}$$

8.2 Bellsche Ungleichung



QM:

$$\hat{S}_{\vec{\alpha}}(1) = \hat{S}(1) \cdot \vec{e}_{\alpha} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}(1) \vec{e}_{\alpha}$$

$$\hat{S}_{\vec{\beta}}(2) = \hat{S}(2) \cdot \vec{e}_{\beta} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}(2) \vec{e}_{\beta}$$

def: $\frac{\hbar}{2} \hat{A}_{\vec{\alpha}} = \hat{S}_{\vec{\alpha}}(1)$, $\frac{\hbar}{2} \hat{B}_{\vec{\beta}} = \hat{S}_{\vec{\beta}}(2)$

$A_{\vec{\alpha}} : \pm 1$, $A_{\vec{\beta}} : \pm 1$

Messung:

$$P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi | \hat{A}_{\vec{\alpha}} \cdot \hat{B}_{\vec{\beta}} | \psi \rangle$$

QM:

$$P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = -\cos \phi$$

$\phi = \angle \vec{e}_{\alpha} \wedge \vec{e}_{\beta}$: z.B. $\phi = 0$ $P(\uparrow \uparrow) = -1$

Bell (Verborgene Variablen λ)

Messung: $A_{\vec{\alpha}}^{\lambda}$ und $B_{\vec{\beta}}^{\lambda}$

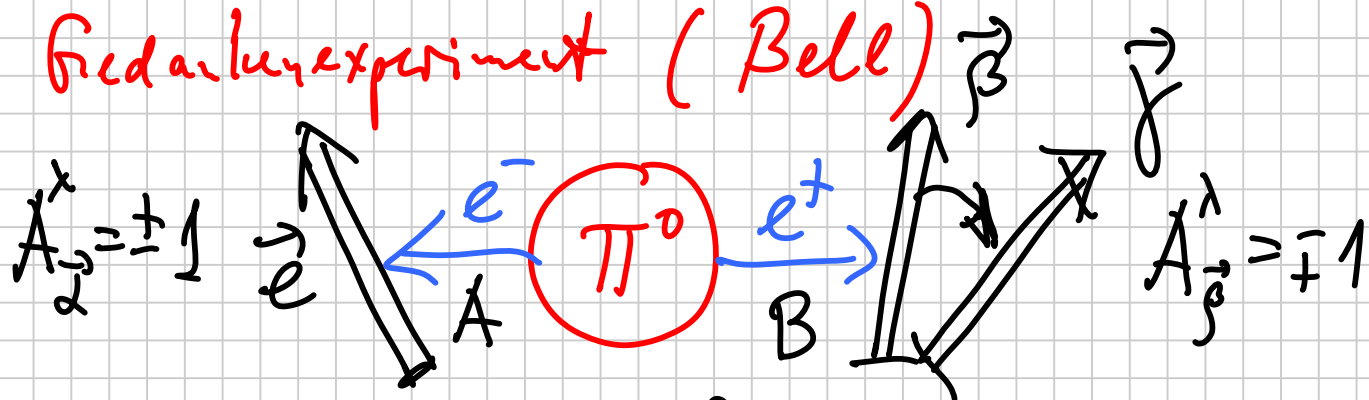
Wahrscheinlichkeit (λ) $\Rightarrow \int_{\lambda} : \int \rho_{\lambda} d\lambda = 1$

$$P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \int \rho_{\lambda} A_{\vec{\alpha}}^{\lambda} \cdot B_{\vec{\beta}}^{\lambda} d\lambda$$

Wenn: $\vec{e}_{\alpha} \parallel \vec{e}_{\beta} \Rightarrow P(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = P(\vec{\beta}, \vec{\beta}) = -1$

$A_{\vec{\alpha}}^{\lambda} = -B_{\vec{\alpha}}^{\lambda}$
(± 1) (∓ 1)

Gedankenexperiment (Bell)



$$P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) - P(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \int \rho_{\lambda} [A_{\vec{\alpha}}^x B_{\vec{\beta}}^y - A_{\vec{\alpha}}^x B_{\vec{\gamma}}^y] d\lambda =$$

$$= - \int \rho_{\lambda} A_{\vec{\alpha}}^x A_{\vec{\beta}}^y [1 + A_{\vec{\beta}}^y B_{\vec{\gamma}}^y] d\lambda$$

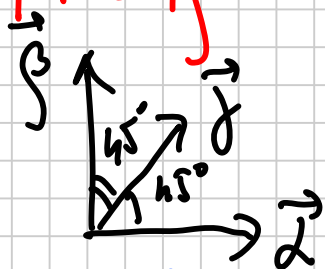
weil $B_{\vec{\beta}}^y = -A_{\vec{\beta}}^y$, $(A_{\vec{\beta}}^y)^2 = 1$

und $-1 \leq A_{\vec{\alpha}}^x \cdot A_{\vec{\beta}}^y \leq 1$ und $\rho_{\lambda} [1 + A_{\vec{\beta}}^y B_{\vec{\gamma}}^y] \geq 0$

$$\Rightarrow |P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) - P(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})| < \int \rho_{\lambda} [1 + A_{\vec{\beta}}^y B_{\vec{\gamma}}^y] d\lambda$$

⊗: $|P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) - P(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})| < 1 + P(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

QM:



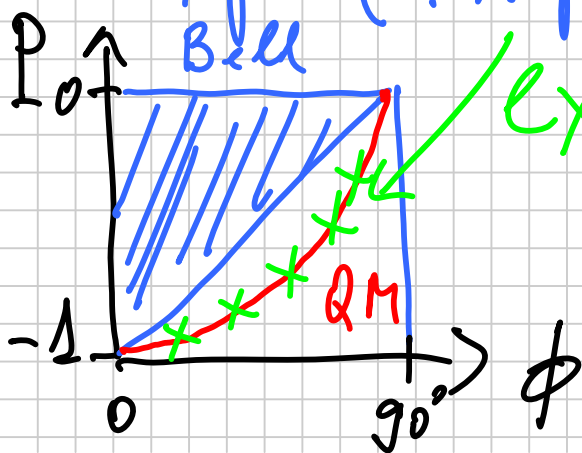
$$P(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

$$P(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = P(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0.7 0.3

Exp. (A. Aspect, Paris 1982)



Kein ⊗
QM !

