Übungen zur

Quantenmechanik II

– Blatt 6 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein

zum 26.12.2013

Aufgabe 1) Bewegungsgleichung

Bestimmen Sie für unabhängige harmonische Oszillatoren (bzw. nicht wechselwirkende Bosonen), die durch den Hamilon-Operator

$$H = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i$$

beschrieben werden, die Bewegungsgleichung für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der Heisenberg Darstellung,

$$a_i(t) = e^{iHt/\hbar} a_i e^{-iHt/\hbar}.$$

Geben Sie auch die Lösung der Bewegungsgleichung an, indem Sie (i) das entsprechende Anfangswertproblem lösen und (ii) durch explizites Ausfüren der Kommutatatoroperationen im Ausdruck $a_i(t) = e^{iHt/\hbar} a_i e^{-iHt/\hbar}$.

Aufgabe 2) Noch mal Kommutatoren

Beweisen Sie die Kommutationsidentitäten

$$\left[\hat{P}, \hat{\Psi}(\xi)\right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \Psi(\xi),$$

$$\left[\hat{P}, \hat{\Psi}^\dagger(\xi)\right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial r} \Psi^\dagger(\xi),$$

wo $\hat{P}$ und $\hat{\Psi}(\xi)$ entsprechend Impuls- und Feldoperatoren für ein System identischer Fermionen bzw. Bosonen in Füllungszahldarstellung sind.

Aufgabe 3) Schwach wechselwirkender Fermi-Gas

Finden Sie in erster Nähung die Energie des Fermi-Gases mit N Spin $s = 1/2$ Teilchen im Volumen V. Die Wechselwirkung der Teilchen ist gegeben durch kurzreichweitigem abstossenden Potential $U(r) \geq 0$. Um die Aufgabe zu lösen mitteln Sie den Wechselwirkungsoperator im Grundzustand des nicht-wechselwirkenden System (erste Ordnung der Störungstheorie). Die Wechselwirkung sei Spin-unabhängig und für sie gelte $k_F R_0 \ll 1$, wo R_0 der Radius des Potentials und $\hbar k_F$ der Fermi-Impuls ist.