Übungen zur

Quantenmechanik II

– Blatt 3 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein

zum 5.11.2013

Aufgabe 1) Zweite Quatisierung und Feldoperatoren

a) Zeigen Sie, dass $[\hat{n}_\mu, \hat{a}^\dagger_\nu]_- = \delta_{\mu\nu}\hat{a}^\dagger_\nu$ und $[\hat{n}_\mu, \hat{a}_\nu]_- = -\delta_{\mu\nu}\hat{a}_\nu$, sowohl für Bosonen wie auch Fermionen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden bosonischen/fermionischen Zustände $\hat{a}^\dagger_\nu|n_1, \ldots, n_\mu, \ldots\rangle_\pm$ und $\hat{a}_\nu|n_1, \ldots, n_\mu, \ldots\rangle_\pm$ sind Eigenzustände des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \sum_\mu \hat{n}_\mu$. Was sind die Eigenwerte?
c) Wir definieren $\langle \mathbf{r}|\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{kr}}$. Zeigen Sie, dass der Feldoperator $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{-i\mathbf{kr}}\hat{a}^\dagger_\mathbf{k}$ ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ erzeugt.
d) Zeigen Sie für Fermionen: $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})|\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_N}\rangle = \sqrt{N+1}|\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_N}, \mathbf{r}\rangle$

Aufgabe 2) Zwei-Teilchen Wechselwirkung

Gegeben sei der Wechselwirkungsterm

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2V}\sum_{\vec{k},\vec{k}',\vec{q}} V_{\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'-\vec{q}}\hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}_{\vec{k}}$$

in der Darstellung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in $\mathbf{k}$-Raum. Führen Sie die zweite Quantisierungstransformation zu den Operatoren $\Psi(\vec{r})$, $\Psi(\vec{r})^\dagger$ durch und bekommen Sie die übliche Form des Wechselwirkungsterms:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\int d^3r d^3r' \Psi(\vec{r})^\dagger\Psi(\vec{r}')^\dagger V(\vec{r}-\vec{r}')\Psi(\vec{r}')\Psi(\vec{r}).$$

Aufgabe 3) Supersymmetrischer Oszillator

Betrachten Sie den sogenannten Supersammetrichen Oszillator, der durch den Hamiltonian $H = \hbar\omega(b^\dagger b + f^\dagger f)$ beschrieben wird; hier $b(b^\dagger)$ und $f(f^\dagger)$ sind die bosonische und fermionische Vernichtungs-(Erzeugungs)operatoren. Finden Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte dieses Hamiltonians. Diskutieren Sie die Entartung der Energieniveaus.

Zeigen Sie, dass H als Antikommutator von Operatoren Q, $Q^\dagger$ dargestellt werden kann, wobei $Q = qb^\dagger f$ und $Q^\dagger = qf^\dagger b$, mit $q = \sqrt{\hbar\omega}$. Die Operatoren $Q(Q^\dagger)$ vertauschen Fermion um Boson und umgekehrt; erhalten also den Teilchenzahl und kommutieren deswegen mit H (überpüfen!).