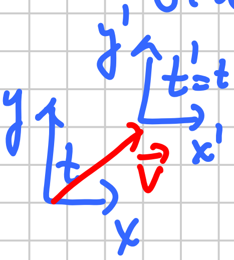
4. Relativistische Quantenmechanik

4.1. Klein-Gordon-Gleichung

Galilei-Invarianz und nicht-relativistische QM



$$\begin{cases} x_i' = x_i - V_i t \\ t' = t \end{cases}$$

Energie-Impuls: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$

$$\begin{cases} \vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{V} \\ E' = E - \vec{p}\vec{V} + \frac{1}{2} m V^2 = \frac{(\vec{p}\,')^2}{2m} \end{cases}$$

Korrespondenzprinzip:

$$\begin{cases} \hat{\vec{p}} \to -i\hbar \vec{\nabla} \\ \hat{E} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

Die Galilei-invariante Beziehung zwischen Impuls und Energie ergibt die Schrödinger-Gleichung

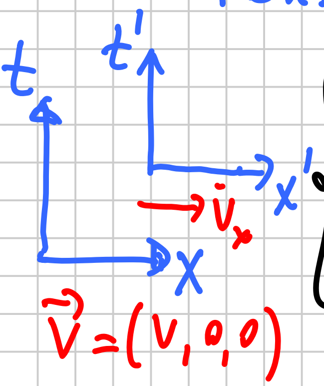
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi$$

Skalar- und Vektor-Potential (EM-Feld)

$$\begin{cases} \hat{\vec{p}} \to \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \\ \hat{E} \to E - \underbrace{e\Phi}_{-V} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Schrödingergleichung – eichinvariant.

Lorentz-Invarianz und relativistische QM



$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3 \\ t' = \dfrac{t - v x_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

Kontravarianter Vierer-Vektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

Kovarianter Vektor (dual zu x^μ)

$\left(\sum_\nu !\right)$ $$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$$

mit $$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ Minkowski-Metrik

Skalar-Produkt → Invariante Länge:

$$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{r}^{\,2} = \text{const.}$$

→ Lorentztransformation! $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$

Dann:

$$x'_\mu x'^\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu x'^\mu = \underbrace{g_{\mu\nu} L^\nu{}_\rho}_{L_\rho{}^\nu g_{\nu\mu}} x^\rho L^\mu{}_\sigma x^\sigma =$$

$$= L_\rho{}^\nu g_{\nu\mu} L^\mu{}_\sigma \underbrace{x^\rho x^\sigma} = x_\rho x^\rho = g_{\rho\sigma} \underbrace{x^\sigma x^\rho}$$

$$\rightarrow L_\rho{}^\nu g_{\nu\mu} L^\mu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad \text{oder} \quad L^T g L = g$$

Für $\vec{v} = (v, 0, 0)$ mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Energie-Impuls:

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit "Längenquadrat":

$$p_{\mu} p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2 = \text{const}$$

Korrespondenzprinzip:

$$p^{\mu} \to \hat{p}^{\mu} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv i\hbar \partial^{\mu}$$

Damit können wir einen ersten Versuch starten:

$$E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$\to \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \pm \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\, \psi \qquad ?$$

Probleme:

1) Zeit und Ort sind asym.

2) Nicht-lokale Probleme! Taylor:

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4}\, \psi = mc^2 \left(1 - \lambda_c^2 \vec{\nabla}^2\right)^{1/2} \psi \approx mc^2 \left(1 - \frac{\lambda_c^2}{2} \vec{\nabla}^2 + \underline{\underline{\dots}}\, \vec{\nabla}^4 + \dots\right.$$

$\Rightarrow$ 1. Versuch: gescheitert!

Wir quantisieren direkt relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4$$

$$\rightarrow \quad \hat{H}^2 = \hat{\vec{p}}^{\,2} c^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right) \psi$$

Kovariante-Form (Klein-Gordon-Glm.)

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

mit

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

d'Alambert Operator

$$k_c = \frac{mc}{\hbar} \equiv \lambda_c^{-1}$$

Ebene Wellen für freie Teilchen:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$$

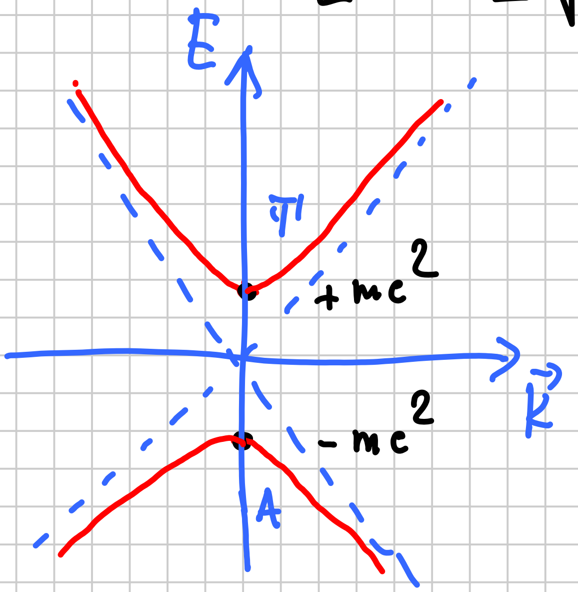
Einsetzen in die Klein-Gordon-Glm.!

$$\left[-\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right] \psi = 0$$

$$\rightarrow \quad E^2 = (\hbar\omega)^2 = c^2 \underbrace{(\hbar\vec{k})^2}_{=\vec{p}^{\,2}} + m^2 c^4$$

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4$$

$$E = \pm\sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}$$



Teilchen:

$$\psi_1 = e^{i\vec{k}\vec{r} - i\sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, t/\hbar}$$

Antiteilchen:

$$\psi_2 = e^{i\vec{k}\vec{r} + i\sqrt{\hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4}\, t/\hbar}$$

ψ und ψ^* – die Lösungen $\Rightarrow$ gilt die Beziehung:

$$\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi - \psi\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi^* = 0$$

Dann

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\mu}\right) = 0$$

Dies entspricht der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

wobei:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \dfrac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) \\ \vec{j} = \dfrac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dichte (andere Form als nicht-Rel.!)

$\Rightarrow$ Stromdichte

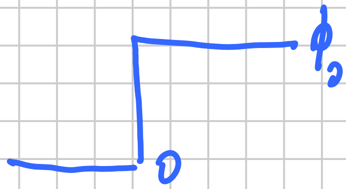
Teilchen: $E_{\vec{p}} = +\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$: $\rho = \dfrac{|E_{\vec{p}}|}{mc^2}$ und $\vec{j} = \dfrac{\vec{p}}{m} = \dfrac{\vec{p}c^2}{|E_{\vec{p}}|}\rho$

Antiteilchen: $E_{\vec{p}} = -\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$: $\rho = -\dfrac{|E_{\vec{p}}|}{mc^2} < 0$ und $\vec{j} = -\dfrac{\vec{p}}{m} = \dfrac{\vec{p}c^2}{|E_{\vec{p}}|}\rho$

4.2 Kleinsches Paradox

Streuung eines Teilchens an einer Potentialstufe:

$$V(x) = e\phi(x) = e\phi_0\,\theta(x)$$



Potential! (EM-Felder: $\phi, \vec{A}$)

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi(\vec r) \\ \frac{\hbar}{i}\vec\nabla \to \frac{\hbar}{i}\vec\nabla - \frac{e}{c}\vec A(\vec r) \end{cases}$$

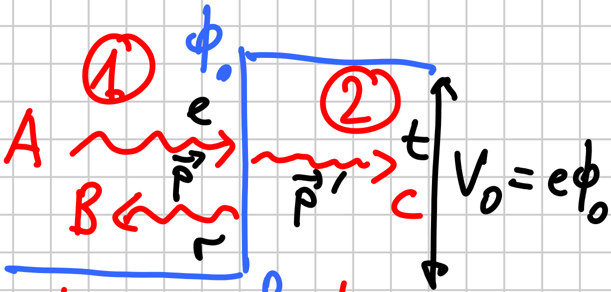
Klein-Gordon-Gl. für Potentialstufenproblem ($\vec A = 0$)

$$\left\{\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi(x)\right)^2 + \hbar^2 c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2c^4\right\}\psi(x) = 0$$

Stationärer Ansatz:

$$\psi_1(x,t) = A e^{i(px-Et)/\hbar} + B e^{-i(px+Et)/\hbar}$$

$$\psi_2(x,t) = C e^{i(p'x-Et)/\hbar}$$



ψ_1, $x<0$, ψ_2, $x>0$

und

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}, \quad p' = \frac{\sqrt{(e\phi_0 - E)^2 - m^2c^4}}{c}$$

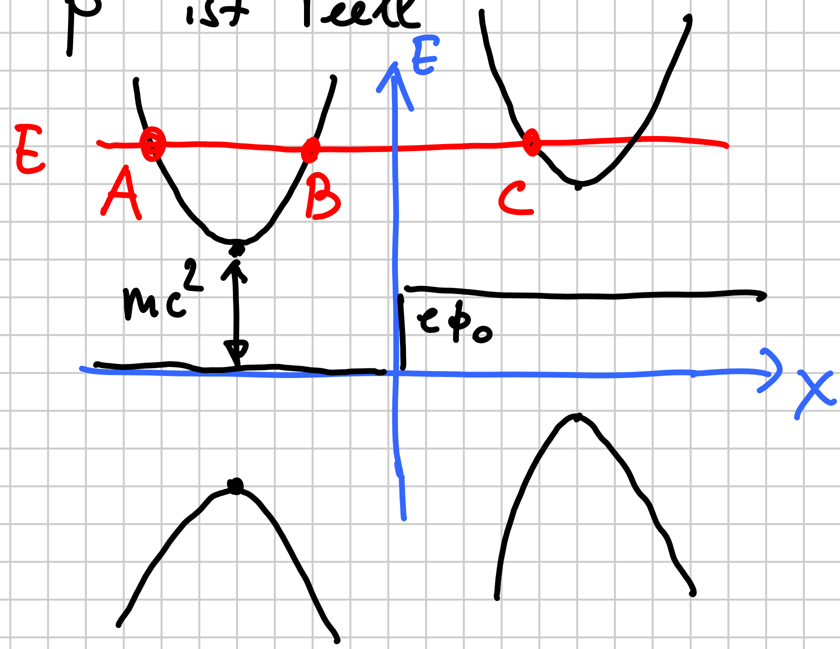
Stetigkeit (ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial x}$) für $x = 0$

$$\begin{cases} A + B = C \\ (A-B)p = Cp' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{p-p'}{p+p'}A \\ C = \frac{2p}{p+p'}A \end{cases}$$

3 verschiedene Fälle:

1) $E - e\phi_0 > mc^2$

$\Rightarrow$ p' ist reell



Strom:

$$j_e = |A|^2 \frac{p}{m}, \quad j_r = -|B|^2 \frac{p}{m}, \quad j_t = |C|^2 \frac{p'}{m}$$

und: $$j_e + j_r = j_t$$

Reflexions- und Transmissions-Koeffizienten:

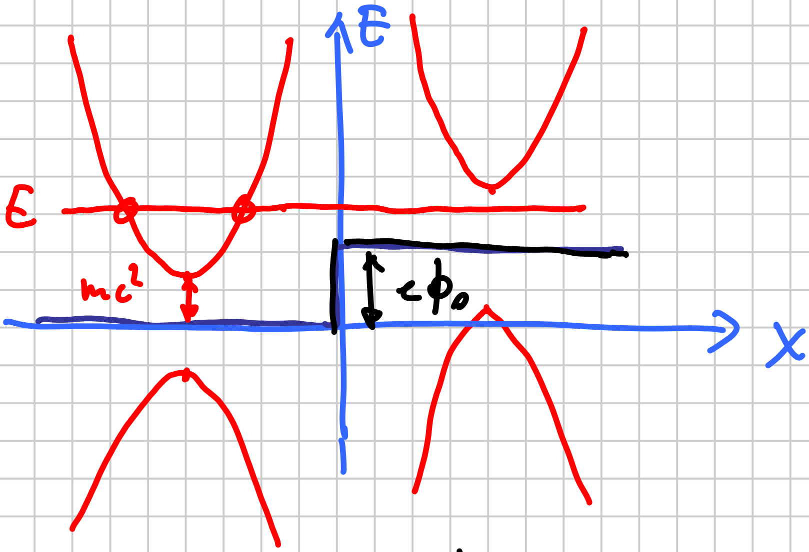
$$R = \left|\frac{j_r}{j_e}\right| = \frac{|p-p'|^2}{|p+p'|} \quad \text{und} \quad T = \left|\frac{j_t}{j_e}\right| = \frac{4pp'}{(p+p')^2}$$

$$\Rightarrow \quad R + T = 1$$

2) $-mc^2 < E - e\phi_0 < mc^2$

$\Rightarrow$ $p' \equiv iq$ rein imaginär

d.h.: für $x > 0$ $\Rightarrow$ eine exponentiell zerfallende Welle (Totalreflexion)



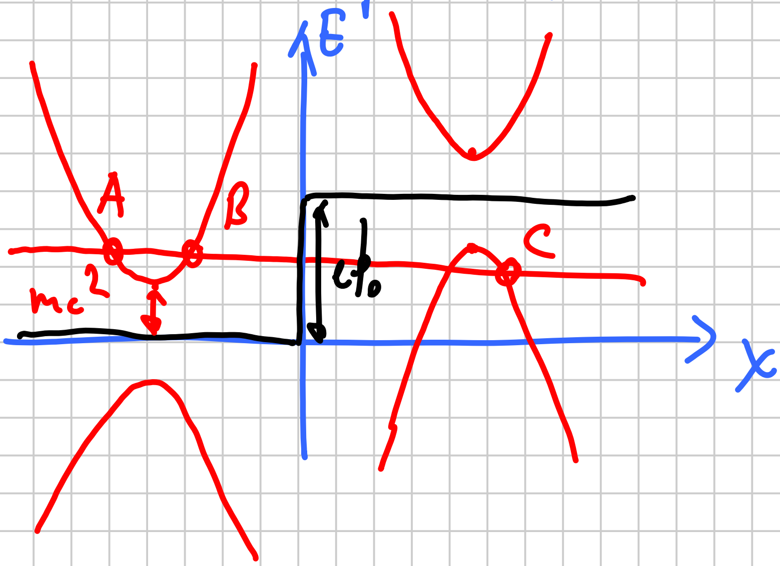
Für $x>0$ die Dichte:

$$\rho(x) = \frac{E-e\phi_0}{mc^2}\,|c|^2 e^{-2qx}$$

$$E-e\phi_0 \begin{matrix} >0 & \text{Teilchen} \\ <0 & \text{Antiteilchen} \end{matrix}$$

3) $E-e\phi_0 < -mc^2 \Rightarrow$ "Neuland"

Damit wird p' wieder reell!



Dann ist $x>0$ nicht mehr verboten!

$$(E-e\phi_0)^2 = p'^2c^2 + m^2c^4$$

$$\frac{\partial}{\partial p'} \rightarrow \qquad 2(E-e\phi_0)\frac{\partial E}{\partial p'} = 2p'c^2$$

Gruppengeschwindigkeit für $x>0$:

$$v = \frac{\partial E}{\partial p'} = \frac{p'c^2}{E-e\phi_0}$$

$$v > 0 \implies p' < 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{Antiteilchen!}\\ e<0, \Rightarrow e\phi_0<0\end{array}\right)$$

Strom:

$$R = \left|\frac{\dot{j}_r}{\dot{j}_e}\right| = \frac{(p-p')^2}{(p+p')^2} > 1$$

und

$$\frac{\dot{j}_t}{\dot{j}_e} = \frac{4pp'}{(p+p')^2} < 0$$

$$\dot{j}_e = \dot{j}_r + \dot{j}_t$$

Bei der Streuung an der Potentialstufe wird ein Teilchen-Antiteilchen-Paar erzeugt (ohne Energie-Kosten!) – Kleinsches Paradox.

→ in relativistischer QM:

Ein wichtiger Schluss ist hier, dass innerhalb der relativistischen Quantenmechanik das Einteilchen-Konzept zusammenbricht.

4.3 Dirac-Gleichung

→ Relativistische Quantenmechanik für Spin $=\frac{1}{2}$-Fermion

P. Dirac (1928) versucht die Wellengleichung der Form

$$(*) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi = \left(\frac{\hbar c}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2\right)\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m c^2\right)\psi$$

zu finden, wobei $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ hermitesche Matrizen sein müssen. Da $\hat{H}_D$ = inv. unter Lorentz-Transformation sind

$\Rightarrow \hat{\alpha}_i$ $(i = x, y, z)$ und $\hat{\beta}$ - sind $N \times N$-Matrizen, und

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$ - ein N-komponentiger Vektor.

Nun soll dieser Ansatz kompatibel mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung sein:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

d.h. jede Komponente von ψ erfüllt eine Klein-Gordon-Gleichung:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial t^2} = \left[-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4\right]\psi_j$$

Die zweifache Anwendung von $\hat{H}_D$ ergibt:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=\{x,y,z\}} \frac{1}{2} \underbrace{(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i)}_{= 2\delta_{ij}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} +$$

$$+ \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_{i=\{x,y,z\}} \underbrace{(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i)}_{= 0} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \underbrace{\beta^2}_{= 1} m^2 c^4 \psi$$

Der Vergleich mit der Klein-Gordon-Gleichung führt auf die drei Bedingungen:

$$\begin{cases} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Matrizen $N \times N$

Die $\hat{\alpha}_i$- und $\hat{\beta}$-Matrizen müssen hermitesch sein, da $\hat{H}_D$ hermitesch ist.

Daher können sie wegen $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ nur die Eigenwerte ± 1 haben.

Weiter finden wir aus $\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0$:

$$\alpha_i = -\beta \alpha_i \beta ,$$

so dass für die Spur gilt:

$$\mathrm{Sp}\, \hat{\alpha}_i = \mathrm{Sp}\, \hat{\beta}^2 \hat{\alpha}_i = \mathrm{Sp}\, \hat{\beta} \hat{\alpha}_i \hat{\beta} = -\mathrm{Sp}\, \hat{\alpha}_i$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Sp}\, \hat{\alpha}_i = 0$ und analog: $\mathrm{Sp}\, \hat{\beta} = 0$

Dies bedingt, dass die Anzahl der positiven (+1) und negativen (-1) Eigenwerte gleich sein muß! Also muß die Dimension der Matrizen $\hat{\alpha}_i$ und $\hat{\beta}$ (N) – gerade sein.

Es ist nicht möglich, für $N=2$ Vier antikommutierende Matrizen mit verschwindender Spur zu finden:

Für 2×2-Matrizen gilt es $\hat{\mathbb{1}}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ als unabhängige Basismatrizen mit nur 3 antikommutierenden Pauli-Matrizen.

$\Rightarrow$ Daher muß N mindestens 4 sein!

Eine spezielle Darstellung dieser Matrizen für $N=4$ ist: (W. Pauli):

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix},$$

wobei die Pauli-Matrizen:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{1}}, \quad \underset{x}{\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{y}{\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{z}{\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Es ist leicht einzusehen, daß sie die Beziehungen erfüllen (z.B.):

$$\hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

u.s.w.

Kontinuitätsgleichung:

Wir definieren den zu ψ adjungierten Vektor

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \dots, \psi_N^*)$$

und betrachten die zeitliche Ableitung des Skalars: $\psi^+\psi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) = \frac{\partial \psi^+}{\partial t}\psi + \psi^+\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Durch Einsetzen der Dirac-Gleichung (*) und ihrer Komplex-Konjungierten erhalten wir dann die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) = -c\left[(\vec{\nabla}\psi^+)\cdot\vec{\alpha}^+\psi + \psi^+\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi\right] +$$

$$+ \frac{imc^2}{\hbar}\left(\psi^+\beta^+\psi - \psi^+\beta\psi\right) = -\vec{\nabla}\cdot c\psi^+\vec{\alpha}\psi$$

wobei verwendet wurde: $\alpha_i^+ = \alpha_i$ und $\beta^+ = \beta$ – also dass die $\vec{\alpha}, \beta$-Matrizen hermitesch sind.

Diese Gleichung hat nun die Struktur der Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$, und wir können sofort definieren:

$$\begin{cases} \rho = \psi^+\psi & \text{die Dichte} \\ \vec{j} = c\psi^+\vec{\alpha}\psi & \text{die Stromdichte.} \end{cases}$$

Oder als Viererstromdichte:

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}) = (c\rho, \vec{j})$$

Dann hat die Kontinuitätsgleichung die kovariante Form:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu j^\mu = 0$$

Beachte, daß $c\vec{\alpha}$ dem Geschwindigkeits-Operator entspricht (später herleiten)

Kovariante Form der Dirac-Gleichung

Wir multiplizieren die Dirac-Gleichung (*) mit β/c und erhalten die Form:

$$i\hbar\beta \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + i\hbar\beta\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\psi - mc\psi = 0$$

wobei $x^0 = ct$, $x^\mu = (ct, \vec{r})$

Wir definieren die neuen Dirac-Matrizen:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3$$

Die Dirac-Gleichung nimmt die Gestalt

$$\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0$$ an.

Feynman-Schreibweise: $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$:

$$(-i\not{\partial} + m)\psi = 0 \quad \text{mit } \hbar = c = 1$$

Die γ^μ-Matrizen besitzen folgene Eigenschaften:

$\gamma^0 = \gamma^{0+}$ - hermitesch

$\gamma^i = -\gamma^{i+}$ - antihermitesch $i = (1,2,3)$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \hat{\mathbb{1}}$$

wobei $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

Ferner gilt: $(\gamma^0)^2 = 1$ und $(\gamma^i)^2 = -1$

Die Dichte und die Stromdichte erhalten die Form:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) = (c\psi^+\psi, \ c\psi^+\vec{\alpha}\psi)$$

$$\Rightarrow \quad j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

wobei $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$

Freie Teilchen

Dirac – ebene Wellen:

$$\psi(\vec{r},\underset{x^0=ct}{t}) = u\, e^{-i(p^0x^0-\vec{p}\cdot\vec{r})/\hbar}$$

wobei – u ein 4-Vektor, und

$$(p^0)^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2c^2$$

Betrachten wir ein Teilchen in seinem Ruhesystem:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta mc^2\psi$$

4 Lösungen:

(*)

$$\psi_1^{(+)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad \psi_2^{(+)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}$$

$$\psi_1^{(-)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} e^{+imc^2t/\hbar}, \quad \psi_2^{(-)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} e^{+imc^2t/\hbar}$$

Spin und Helizität

Die Lösungen (*) sind auch Eigenvektoren des Operators:

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{pmatrix}\hat{\sigma}_3 & 0\\ 0 & \hat{\sigma}_3\end{pmatrix}$$

mit: $\hat{\Sigma}_3\psi_1^{(\pm)} = +\psi_1^{(\pm)}$ und $\hat{\Sigma}_3\psi_2^{(\pm)} = -\psi_2^{(\pm)}$

im Ruhesystem des Teilchens!

Wir können
$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\Sigma}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$
als Spin-Operator interpretieren, und aus
$$\frac{\hbar^2}{4}\vec{\Sigma}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$
schließen wir, dass die Lösungen (*) Spin $= \frac{1}{2}$ -Spinoren beschreiben.

Spin-Operator kommutiert mit $\hat{H}_r = \beta mc^2$ – das Ruhesystem

Für endliche Geschwindigkeit: $\vec{p} \neq 0$:
$$[\hat{H}_D, \hat{\vec{\Sigma}}] \neq 0 \quad \text{mit} \quad \hat{H}_D = c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} + \beta mc^2$$

Die Helizität, d.h. die Spinkomponente parallel zum Impuls ($\vec{\Sigma} \parallel \vec{p}$), bleibt erhalten.

Helizität-Operator:
$$\hat{h}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \Rightarrow [\hat{H}_D, \hat{h}(\vec{p})] = 0$$

Gesamtdrehimpuls → weitere Erhaltungsgröße
$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \equiv [\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}] + \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\Sigma}}$$

z.B.:
$$[\hat{H}_D, \hat{S}_x] = i\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y)$$
$$[\hat{H}_D, \hat{L}_x] = i\hbar c(\alpha_z \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_z) \Rightarrow [\hat{H}_D, \hat{\vec{J}}] = 0$$

Ebenen Wellen mit $\vec{p} \neq 0$

Wir spalten den 4er-Vektor ψ in zwei Unterspinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

so daß die Dirac-Gleichung die Form hat

$$\hat{p}^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc & \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}} & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Eliminierung eines Spinoren:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hat{p}^0 + mc} \varphi ,$$

dann:

$$\hat{p}^0 \varphi = \left[mc + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})^2}{\hat{p}^0 + mc} \right] \varphi$$

Wir nutzen $(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}})^2 = \hat{\vec{p}}^2$, $\hat{p}^0(\hat{p}^0 + mc) = mc(\hat{p}^0 + mc) + \hat{\vec{p}}^2$

Dirac-Ebene Wellen:

$$\psi^{(+)}_{1,\vec{p}} = \tilde{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} \exp^{(+)} \equiv C\, u^{(1)}(\vec{p}) \exp^{(+)}$$

$$\psi^{(+)}_{2,\vec{p}} = \tilde{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ B_- \\ C_- \end{pmatrix} \exp^{(+)} \equiv C\, u^{(2)}(\vec{p}) \exp^{(+)}$$

$$\psi^{(-)}_{1,\vec{p}} = \tilde{C} \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp^{(-)} \equiv C\, u^{(3)}(\vec{p}) \exp^{(-)}$$

$$\psi^{(-)}_{2,\vec{p}} = \tilde{C} \begin{pmatrix} B_- \\ A_- \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp^{(-)} \equiv C\, u^{(4)}(\vec{p}) \exp^{(-)}$$

mit:

$$\tilde{C} = \sqrt{\frac{E_{\vec{p}} + mc^2}{2mc^2}}\,, \qquad C = \sqrt{\frac{mc^2}{E_p \cdot V}}$$

$$A_\pm = \pm \frac{p_z c}{E_{\vec{p}} + mc^2}\,, \qquad B_\pm = \frac{p_x \pm i p_y}{E_{\vec{p}} + mc^2}$$

$$\exp^{(\pm)} = e^{\pm i(\vec{p}\vec{r} - E_{\vec{p}} t)/\hbar}$$

$$E_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$$

Diese Zustände sind orthogonal:

$$\psi^{(\pm)\dagger}_{i\vec{p}}\, \psi^{(\pm)}_{j\vec{p}} = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2}\, \delta_{ij}$$

die Norm ist abhängig vom Bezugssystem!

Zitterbewegung

Allgemeine Wellenfunktion:

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\vec{p}} V}} \left\{ \sum_{\ell=1,2} C_{\vec{p},\ell}\, u^{(\ell)} e^{i(\vec{p}\vec{r} - E_{\vec{p}} t)/\hbar} + \sum_{\ell=3,4} C_{\vec{p},\ell}\, u^{(\ell)} e^{-i(\vec{p}\vec{r} - E_{\vec{p}} t)/\hbar} \right\}$$

Geschwindigkeits-Operator: (Bewegungsgleichung)

$$\hat{v}^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\hbar}{i}[\hat{H}_D, x^i] = c\,\alpha^i \Rightarrow \hat{\vec{v}} = c\,\hat{\vec{\alpha}}$$

Erwartungswert der Geschwindigkeit:

$$\langle \hat{v}^j \rangle = \int d\vec{r}\; \psi^\dagger(\vec{r},t)\, \hat{v}^j\, \psi(\vec{r},t) =$$

$$= \sum_{\vec{p}} \frac{p^j c^2}{E_p} \left\{ \sum_{\ell=1,2} |c_{\vec{p},\ell}|^2 + \sum_{\ell=3,4} |c_{\vec{p},\ell}|^2 \right\} +$$

$$+ \sum_{\vec{p}} \sum_{\substack{\ell=1,2 \\ \ell'=3,4}} \frac{mc^2}{E_p} \left\{ c^*_{\vec{p}\ell'} c_{\vec{p}\ell}\, u^{(\ell')\dagger}(\vec{p})\, c\alpha^j\, u^{(\ell)}(\vec{p})\, e^{-2iE_p t/\hbar} + c_{\vec{p}\ell'} c^*_{\vec{p}\ell}\, u^{(\ell)\dagger}(\vec{p})\, c\alpha^j\, u^{(\ell)}(\vec{p})\, e^{+2iE_p t/\hbar} \right\}$$

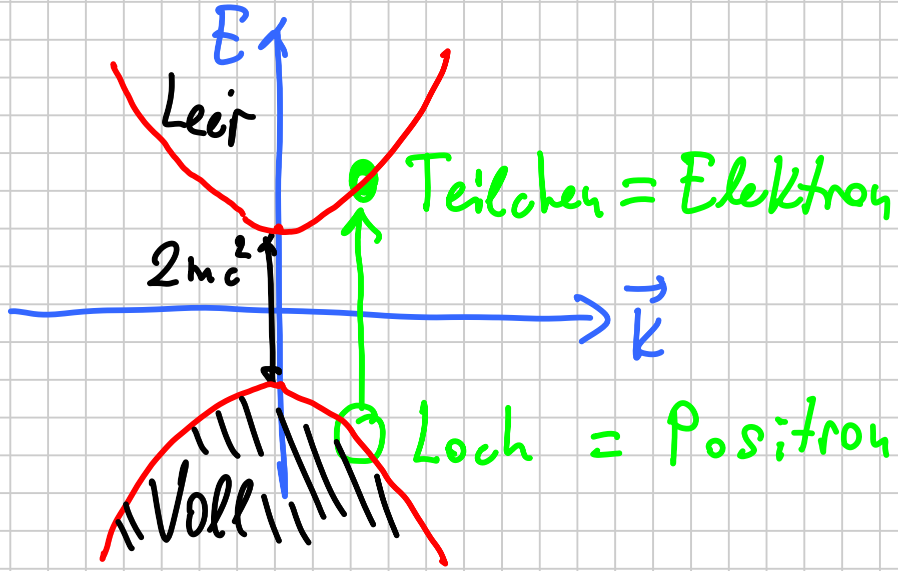
$\rightarrow$ schnelle Oszillationen mit Frequenz $\sim \frac{2mc^2}{E_p}$

(Zitterbewegung)

Der Dirac-See

$|0\rangle$

Vakuum:



Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld

$A^\mu = (\Phi, \vec{A})$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \beta mc^2 + e\Phi \right] \psi$$

Nichtrelativistischer Grenzfall: Pauli-Gleichung

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$ – zweikomponenten – φ, χ

Dirac-Glн:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\tilde{\chi} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\tilde{\varphi} \end{pmatrix} + e\Phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

mit $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$

Im nichtrelativistischen Grenzfall:

$$E^{(+)}_{\vec{p}} = +\sqrt{\cancel{p^2c^2} + m^2c^4} \simeq mc^2$$

Deshalb zerlegen wir die Lösung mit $E > 0$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

← langsam variieren!

Dann:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\chi \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\,\varphi \end{pmatrix} + e\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}$$

In der zweiten Gln. (χ) können wir $\hbar\dot{\chi}$ und $e\Phi\chi$ gegenüber $2mc^2\chi$ vernachlässigen, $\Rightarrow$

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2mc}\varphi$$

Nährungsweise: $\chi \sim \frac{v}{c}\varphi \ll \varphi$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \varphi = \text{"große"} \\ \chi = \text{"kleine"} \end{pmatrix}$ Komponenten des Spinors

Gleichung für φ:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) + e\Phi\right]\varphi$$

Benutzen wir folgende Gl.:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Kommt aus: $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

Dann:

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}})(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{\pi}}) = \hat{\vec{\pi}}^2 + i\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{\pi}}\times\hat{\vec{\pi}}) =$$

Dabei

$$(\vec{\pi}\times\vec{\pi})^i\varphi = -i\hbar\left(\frac{-e}{c}\right)\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j A^k - A^k\partial_j\right)\varphi =$$

$$= i\frac{\hbar e}{c}\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j A^k\right)\varphi = i\frac{\hbar e}{c}B^i\varphi$$

mit $B^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A^k$ oder $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

In Vektor-Form:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}\varphi + \vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}\times\vec{A}\varphi - (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{A} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\varphi$$

Pauli-Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} + e\Phi\right]\varphi$$

$\Rightarrow$ Spin: $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ $\Rightarrow$ Die 2 Komponenten von φ beschreiben den Spin des Elektrons mit dem gyromagnetischen Verhältnis: $g = 2$

Im homogenen Magnetfeld: $\vec{B} = \text{const.}$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}\,!$$

Bahndrehimpuls: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

Nutzen wir: $(\vec{p}\cdot\vec{A}) = -i\hbar(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 0$

$$-\vec{p}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{p} = -2\vec{A}\cdot\vec{p} = 2\,\frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\vec{p} = -(\vec{r}\times\vec{p})\vec{B} = -\vec{L}\cdot\vec{B}$$

Dann:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e}{2mc}(\vec{L}+2\vec{S})\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^{\,2} + e\Phi\right]\psi$$

Die Wechselwirkung mit EM-Feld:

$$\hat{H}_{int} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^{\,2} + e\Phi$$

mit magnetischem Moment:

$$\mu = \mu_L + \mu_S = \frac{e}{2mc}(\vec{L}+2\vec{S})$$

Landé-Faktor: $\mu_S = g\frac{e}{2mc}\vec{S}$

$g = 2$

Zweite-Ordnung-Korrektur:

$$\Delta\hat{H}^{(2)} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{(\vec{p}^{\,2})^2}{8m^3}$$ – relativistische Massenkorrektur

$$\hat{H}_2 = -\frac{e}{4m^2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{E}\times\vec{p}) \overset{\phi(r)}{=} \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{\sigma}\cdot\vec{L}$$ – Spin-Bahn-Kopplung

$$H_3 = -\frac{e}{8m^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{e^2}{8m^2}\vec{\nabla}^2\Phi$$ – Darwin-Term