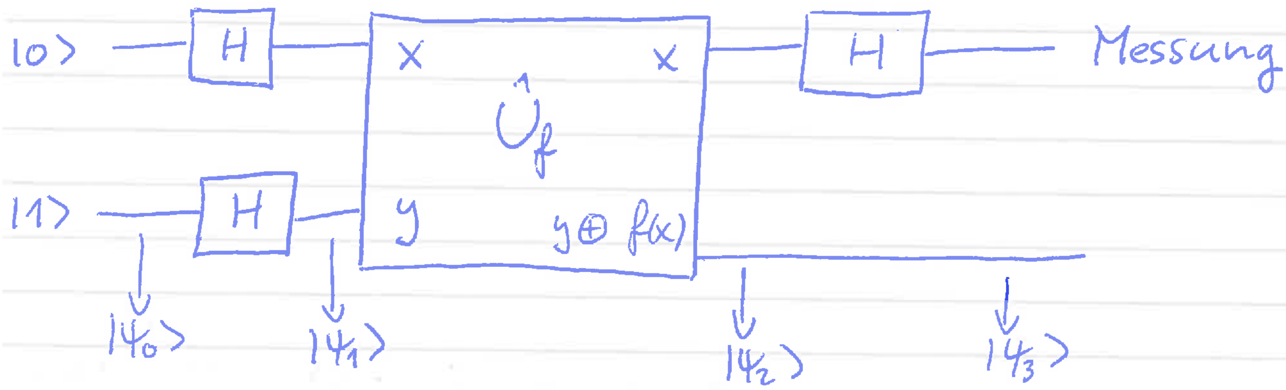
Vom Deutsch-Jozsa Algorithmus wissen wir:



$\rightarrow |\psi_0\rangle = |0\rangle|1\rangle$

$\rightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)$

$\rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\left\{(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle\right\}(|0\rangle - |1\rangle)$

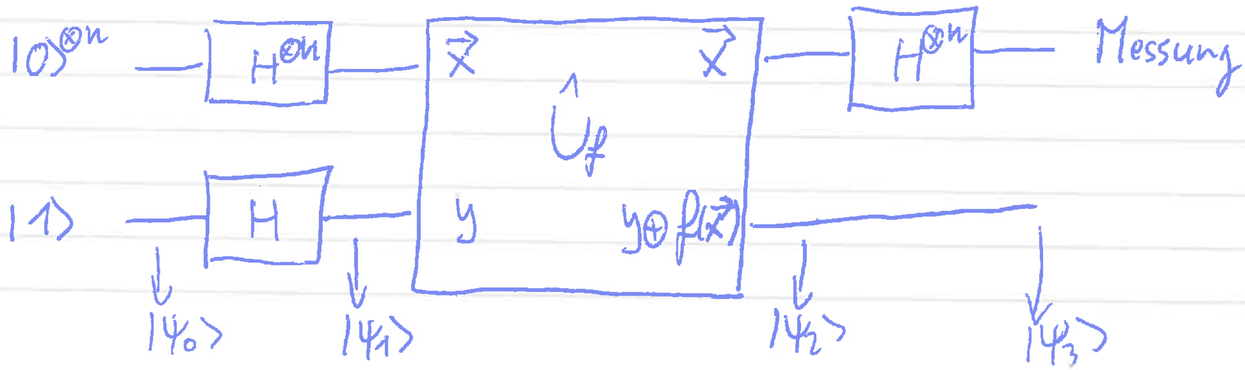
$\rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left[(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\right]|0\rangle + \left[(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\right]|1\rangle\right\}$

$\otimes \frac{(|0\rangle - |1\rangle)}{\sqrt{2}}.$

Interessanterweise ist $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}(-1)^{f(x)}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$

schreibbar.

Mit n-Qubits hätten wir dann:



$\rightarrow \quad |\psi_0\rangle = |0,\dots,0\rangle\,|1\rangle$

Hier gilt es: $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ mit $x_j = 0,1 \quad \forall j = 1,\dots,n,$

$$H^{\otimes n} = \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n\text{-mals}}$$

Für einen beliebigen Zustand $|\vec{x}\rangle$ haben wir:

$$H^{\otimes n}\,|\vec{x}\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y})\bmod 2}\,|\vec{y}\rangle$$

Obschon die Notation in der Summe dezimal ist, ist es binär zu verstehen.

wobei $\vec{x}\cdot\vec{y}$ das Skalarprodukt ist:

$$(\vec{x}\cdot\vec{y}) \bmod 2 = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \bmod 2.$$

Beispiel:

$|\vec{x}\rangle = |011\rangle$

$H^{\otimes 3} = H\otimes H\otimes H$

$$H^{\otimes 3}\,|011\rangle = \frac{1}{2^{3/2}}\{|0\rangle+|1\rangle\}\{|0\rangle-|1\rangle\}\{|0\rangle-|1\rangle\}$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}\{|000\rangle - |001\rangle - |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle + |111\rangle\}$$

Und

$$\frac{1}{2^{3/2}}\sum_{y=0}^{7}(-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y})\bmod 2}|y\rangle = \frac{1}{2^{3/2}}\Big\{(-1)^{(0,1,1)\cdot(0,0,0)\bmod 2}|0,0,0\rangle +$$
$$+(-1)^{(0,1,1)\cdot(0,0,1)\bmod 2}|0,0,1\rangle + (-1)^{(0,1,1)\cdot(0,1,0)\bmod 2}|0,1,0\rangle + (-1)^{(0,1,1)\cdot(1,0,0)\bmod 2}|1,0,0\rangle$$
$$+(-1)^{(0,1,1)\cdot(0,1,1)\bmod 2}|0,1,1\rangle + (-1)^{(0,1,1)\cdot(1,0,1)\bmod 2}|1,0,1\rangle + (-1)^{(0,1,1)\cdot(1,1,0)\bmod 2}|1,1,0\rangle$$
$$+(-1)^{(0,1,1)\cdot(1,1,1)\bmod 2}|1,1,1\rangle\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}} \Big\{ |0,0,0\rangle - |0,0,1\rangle - |0,1,0\rangle + |1,0,0\rangle + |0,1,1\rangle - |1,0,1\rangle - |1,1,0\rangle + |1,1,1\rangle \Big\}$$

Infolgedessen haben wir:

$$\rightarrow |\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |\vec{x}\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\rightarrow |\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(\vec{x})} |\vec{x}\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\rightarrow |\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(\vec{x})} H^{\otimes n} |\vec{x}\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(\vec{x})} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y}) \bmod 2} |\vec{y}\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \left(\sum_{y=0}^{2^n-1} C_{\vec{y}} |\vec{y}\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

wobei $C_{\vec{y}} = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(\vec{x})} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y}) \bmod 2}$ ist.

a) $f(\vec{x}) = 0$ oder $f(\vec{x}) = 1$ $\forall \vec{x}$ bzw. f ist konstant.

$$\Rightarrow C_{\vec{y}} = \frac{(-1)^{f(\vec{x})}}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y}) \bmod 2} = (-1)^{f(\vec{x})} \delta_{\vec{y},\vec{0}}$$

Um sich zu überzeugen, gibt es zwei Wege:

1. Es ist klar, dass das Skalarprodukt $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$ ist, wenn $\vec{y}=(0,0,\dots 0)\equiv\vec{0}$ ist. Dies gilt für alle mögliche $\vec{x}$.

$$\Rightarrow (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y})\bmod 2} = (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{0})\bmod 2} = (-1)^0 = 1 \quad \forall \vec{x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y})\bmod 2} = 2^n \Rightarrow c_{\vec{y}} = c_{\vec{0}} = 1$$

Da $\langle\psi_3|\psi_3\rangle = 1$ ist, müssen $c_{\vec{y}}=0 \quad \forall \vec{y}\neq\vec{0}$.

$$\Rightarrow c_{\vec{y}} = (-1)^{f(\vec{x})}\delta_{\vec{0},\vec{y}}.$$

2. Man kann sich auch überzeugen, dass die Summe

$$\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{(\vec{x}\cdot\vec{y})\bmod 2}$$

für $\vec{y}\neq\vec{0}$ Null ist, denn die Hälfte der Summanden ist -1 und die andere Hälfte der Summanden ist $+1$, sodass ihre Summe Null gibt.

Daher, wenn die Funktion konstant ist, bekommen wir das Resultat $|\vec{y}\rangle = |\vec{0}\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1, wenn wir den 1. Register messen.

b) Die Funktion f ist balanciert.
In diesem Fall und für $\vec{y}=\vec{0}$ haben wir:

$$c_{\vec{y}} = \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(\vec{x})} = 0.$$

Dies folgern wir von der Tatsache, dass die Funktion balanciert ist. Dadurch, dass sie balanciert ist, ist die Hälfte von $(-1)^{f(\vec{x})} = +1$ und die Hälfte (-1), sodass ihre Summe Null ist.

Lorentz center

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass wir von einer Messung des 1. Registers das Resultat $|\vec{y}\rangle = |\vec{0}\rangle$ bekommen, ist Null.

Fazit: Auch wenn wir N-Bit ($N=2^n$) haben, können wir mit 100% Zuversicht und durch eine einzige Messung diskriminieren, ob die Funktion konstant oder balanciert ist. Das Messresultat $\vec{y}=\vec{0}$ impliziert, dass die Funktion konstant ist, wobei das Messresultat $\vec{y}\neq\vec{0}$ die balancierte Funktion impliziert.