# Übungen zur Vorlesung Quantencomputer – Blatt 7
# Wintersemester 2011*

(Dated: 9. Dezember 2011 – Abgabetermin Freitag, 16. Dezember 2011, vor der Vorlesung)

## I. SCHRÖDINGERS KATZE

Wenn $|\psi_a\rangle$ und $|\psi_b\rangle$ mögliche Zustände eines quantenmechanischen Systems sind, so ist auch die Überlagerung $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_a\rangle+|\psi_b\rangle)$ eine möglicher Zustand. Dieses Superpositionsprinzip ist essentiell, um Interferenzphänomene zu sehen. Wendet man es jedoch auf "grosse" Objekte an, so führt es z. B. zu der klassisch widersprüchlichen Aussage, dass das Objekt sich an zwei Orten gleichzeitig befinden kann.

Das berühmteste Beispiel ist Schrödingers Katze, die sich in einer Überlagerung aus "|tot⟩" und "|lebendig⟩" befindet. In diesem Übungsblatt werden wir sehen, das man die Überlagerung von makroskopischen Objekten in Praxis nicht detektieren kann. Anders ist dies jedoch bei Experimenten mit Ionen mit relativ kleinem $\alpha$, bei denen sich ein solcher Zustand nachweisen ließ (siehe Monroe et al., Science **272**, 1131 (1996)).

Makroskopische Überlagerungen sind extrem fragil und schon geringste Kopplung an die Umgebung kann sie zerstören. Wir werden auf dieses Phänomen im Zusammenhang mit Dekohärenz und Fehlerkorrektur wieder zurückkommen.

Wir führen die Operatoren $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega_z/\hbar}$ und $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\omega_z\hbar}$ ein. Mit diesen lauten die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}+i\hat{P})$ und $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}-i\hat{P})$

### A. Katzen-Zustand (4 Punkte)

1. Verifiziere, dass für die neuen Variablen $X$ und $P$ gilt:

$$\hat{P} = -i\frac{\partial}{\partial X} \qquad \hat{X} = i\frac{\partial}{\partial P} \tag{1}$$

2. Konstruiere die Orts- und Impulsdarstellung $\psi_\alpha(X) = \langle X|\alpha\rangle$ und $\psi_\alpha(P)$ des kohärenten Zustands $\hat{a}\psi_\alpha(X) = \alpha\psi_\alpha(X)$. Es ist nicht notwendig zu normalisieren. Benutze z.B. Gleichung (1).

3. Numerisches Beispiel: Betrachte ein Pendel mit Fadenlänge 1 m und Masse 1 g. Nimm an, dass das Pendel durch einen kohärenten Zustand beschrieben werden kann. Zur Zeit $t = 0$ hat das Pendel die Position $\langle x(0)\rangle = 1\,\mu m$ und $\langle v\rangle = 0$.

   (a) Was ist der Wert von $\alpha(0)$?

   (b) Was ist die relative Ortsunsicherheit $\Delta x/\langle x(0)\rangle$?

4. Wir betrachten den Schrödinger-Katzen Zustand

$$|S_-\rangle = \frac{|\alpha e^{+i\phi/2}\rangle - |\alpha e^{-i\phi/2}\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

   Wir nehmen im Rest des Blattes an, dass $\alpha$ reell ist und $\phi = \pi$. Was sind die physikalischen Eigenschaften des Zustands (Ort, Geschwindigkeit)? Sei $|\alpha|$ von ähnlicher Größenordnung wie in Aufgabe 3. In wie fern realisiert dieser Zustand einen Schrödinger-Katzen Zustand, wie er in der Einleitung beschrieben ist?

*bei Fragen: henning.moritz@physik.uni-hamburg.de

### B. Quantenmechanische Überlagerung und gemischte Zustände (5 Punkte)

Wir untersuchen nun die Eigenschaften des Zustands (2) in der makroskopischen Situation $|\alpha| \gg 1$, $\alpha$ reell, $\phi = \pi$ und $p_0 = \alpha\sqrt{2m\hbar\omega_z}$

1. Berechne die Orts- und Impulswahrscheinlichkeits-Verteilung (ohne Normalisierung). Sie sind hier auch für $\alpha = 5$ gezeichnet. Interpretiere diese Verteilungen.

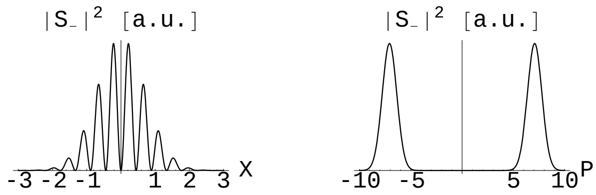


FIG. 1: Aufenthaltswahrscheinlickeit von $S_-$ im Orts und Impulsraum.

2. Alice präpariert N unabhängige Systeme im Zustand (2) und misst deren Impuls. Der Messapparat hat die Auflösung $\delta p$ so dass $\sqrt{m\hbar\omega_z} \ll \delta p \ll p_0$. Zeichne das Histogramm der Ergebnisse der N Messungen qualitativ.

3. Der Zustand (2) repräsentiert die Überlagerung von zwei Zuständen, die makroskopisch unterschiedlich sind und führt zu dem in der Einleitung beschriebenen Paradox. Bob behauptet, dass Alice gar nicht den Zustand (2) präpariert habe, sondern eine statische Mischung von N/2 Systemen im Zustand $|i\alpha\rangle$ und die andere Hälfte im Zustand $|-i\alpha\rangle$. Angenommen, das wäre wahr, würde man dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie in der vorhergehenden Aufgabe bei N Impulsmessungen erhalten?

4. Um die Frage zu entscheiden misst Alice die Position Ihrer N Systeme, welche im Zustand (2) sind. Zeichne die Form des Messergebnisses unter der Annahme, dass die Ortsauflösung des Detektors $\delta x \ll 1/\alpha\sqrt{\hbar/m\omega_z}$ erfüllt. Was erhält Bob bei gleicher Messung mit seiner statistischen Mischung?

5. Wir nehmen an, wir hätten das Pendel aus Aufgabe 3. verschränkt, d.h. es befinde sich im Zustand (2) mit dem $\alpha$ aus Aufgabe 3. Welche Ortsauflösung $\delta x$ müsste der Detektor besitzen, um den Unterschied zwischen einer quantenmechanischen Überlagerung und einem statistischen Gemisch festzustellen?

### C. Das Ionenfallen-Experiment (1 Punkt)

Wir haben nun alles beisammen, um zu verstehen, wie eine Schrödinger Katze in einer Ionenfalle erzeugt wird. Lies den Artikel von Monroe et al., Science **272**, 1131 (1996). Zum Verständnis der Anregung der kohärenten Zustände ist folgendes Bild hilfreich: Im Experiment werden zwei Ramanlaser (b) und (c) eingestrahlt, die eine Frequenzdifferenz $\Delta\omega = \omega_x$ besitzen (Achtung: Was wir bis jetzt $\omega_z$ genannt haben, ist im Paper $\omega_x$). Wenn wir das resultierende E-Feld der zwei überlagerten Strahlen betrachten, hat es eine schnell rotierende Komponente und eine Komponente, die genau dem mit der Fallenfrequenz oszillierenden E-Feld aus Blatt 6, Aufgabe B.1 entspricht.

1. Erkläre qualitativ, wie die Forscher den Überlagerungszustand nachweisen, ohne die hohe Ortsauflösung $\delta x$ zu benötigen.