Übungen zur Vorlesung Quantencomputer – Blatt 6
Wintersemester 2010

(Dated: 2. Dezember 2011 – Abgabetermin Freitag, 9. Dezember 2011)

I. KOHÄRENTE BEWEGUNGSZUSTÄNDE IN IONENFALLEN

In Ionenfallen kann man kohärente Zustände der Bewegung anregen, die den gleichen Bewegungsgleichungen wie klassische Zustände gehorchen. Gleichzeitig stellen unterscheidliche Hyperfeinzustände auch wohldefinierte Qubits dar. Somit ergibt sich die Möglichkeit, quasi-klassische und rein quantenmechanische Zustände zu verschränken. Die wesentlichen Voraussetzungen dafür wollen wir in diesem Blatt studieren.

A. Kohärente Zustände (5 Punkte)

Es seien $|n\rangle$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators mit Eigenenergien $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega_z$ und $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n |n\rangle}{\sqrt{n!}}$ ein kohärenter Zustand.

1. Sind zwei kohärente Zustände orthogonal?
2. Wie sieht ein kohärenter Zustand nach freier Entwicklung zur Zeit t aus? Drücke den Zustand zur Zeit t als Funktion von $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega_z t}$ aus.
3. Berechne den Orts- und Impuls-Erwartungswert $\langle x(t)\rangle$ bzw. $\langle p(t)\rangle$ und zeige, dass $|\alpha\rangle(t)$ Kreise im Phasenraum ausführt.

B. Die Ionenfalle im Wechselwirkungsbild (5 Punkte)

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie man in einer Ionenfalle kohärente Bewegungszustände erzeugen kann.

1. Wir nehmen an, es existiert ein elektrisches Feld $E(t) = E_{0z} \sin(\omega t + \varphi)$, das mit annähernd der Fallenfrequenz ω_z oszilliert. Dieses kann direkt an die elektrische Ladung des Ions koppeln. Die Wechselwirkung wird durch den Hamilton

$$H_I = qE(t)\hat{z} = eE_{0z} \sin(\omega t + \varphi) z_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{1}$$

beschrieben. Die freie Zeitentwicklung im harmonischen Oszillator ist gegeben durch $H_0 = \hbar\omega_z \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Transformiere in die Wechselwirkungs-Darstellung und berechne

$$H_I^{'} = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}. \tag{2}$$

Benutze auch die "Rotating Wave" Näherung.

2. Wir nehmen an, dass $\delta = \omega - \omega_z = \varphi = 0$. Zeige, dass der Zeitenwicklungsoperator in der Wechselwirkungs-Darstellung

$$U_I^{'}(t) = e^{-iH_I^{'} t/\hbar} = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} =: D(\alpha) \qquad \text{mit } \alpha = \Omega t e^{-i\varphi} \text{ und } \Omega = \frac{eE_{0z} z_0}{2\hbar} \tag{3}$$

einen kohärenten Zustand erzeugt, also $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$. Man nennt $D(\alpha)$ einen "Displacement-Operator", da man durch das Ausführen das Vakuum zu einem Punkt α im Phasenraum versetzt.

Tip.: Benutze $e^{A+B} = e^A e^B e^{-1/2[A,B]}$.