Übungen zur Vorlesung Quantencomputer – Blatt 5
Wintersemester 2011*

(Dated: 25. November 2011 – Abgabetermin Freitag, 2. November 2011, vor der Vorlesung)

I. MANIPULATION MITTELS DER JAYNES-CUMMINGS WECHSELWIRKUNG

Wir haben gesehen (z.B. Foot, Kapitel 7), dass man durch Einstrahlung eines klassischen elektromagnetischen Feldes den Blochvektor eines Atoms manipulieren kann. Dabei gibt es keine Dekohärenz, wenn man von möglichen spontanen Zerfällen des energetisch höher liegenden Zustandes $|e\rangle$ in den Grundzustand $|g\rangle$ absieht. In diesem Blatt wollen wir untersuchen, inwieweit dies noch gerechtfertigt ist, wenn man das elektromagnetische Feld quantisiert betrachtet, und die Atom-Licht Wechselwirkung mit einem Jaynes-Cummings Hamilton darstellt. Die ist nicht offensichtlich, denn bei Wechselwirkung eines einzelnen Photons (Fockzustand) mit dem Atom kann es zu Verschränkung zwischen Atom und Feld kommen ($|g,1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g,1\rangle + |e,0\rangle)$). Es ist bemerkenswert, dass ein kohärenter Zustand des Feldes nach Wechselwirkung mit dem Photon in guter Näherung nicht mit ihm verschränkt wird.

Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir den angeregten Zustand mit $|e\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (statt $|0\rangle$) und den Grundzustand mit $|g\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (statt $|1\rangle$) bezeichnen. Der vereinfachte Jaynes-Cummings Hamilton und ein kohärenter Zustand sind gegeben durch:

$$H = g(a^\dagger \sigma_- + a\sigma_+) \qquad |\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\alpha^l |l\rangle}{\sqrt{l!}} \qquad \text{mit } \alpha \text{ reell.} \tag{1}$$

1. Nenne mindestens zwei Eigenschaften des kohärenten Zustands (1 Punkt).

2. Sei $|\chi\rangle$ ein Eigenzustand eines Operators $\hat{O}$ mit Eigenwert λ ist. Zeige, dass

$$e^{i\hat{O}t}|\chi\rangle = |\chi\rangle e^{i\lambda t} \qquad \text{ist (1 Punkt).} \tag{2}$$

3. Zeige, dass $|\chi_j^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|j,e\rangle \pm |j+1,g\rangle)$ die Eigenzustände des Jaynes-Cummings Hamilton mit $H|\chi_j^\pm\rangle = \pm g\sqrt{j+1}|\chi_j^\pm\rangle$ sind (1 Punkt).

4. Berechne

$$A_n = \langle n|e^{iHt}|\alpha\rangle, \tag{3}$$

wobei $|n\rangle$ ein Zahlzustand und $|\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand ist (4 Punkte).
Achtung: A_n ist ein Operator auf Atomzuständen und Sie sollten das folgende Ergebnis erhalten:

$$A_n = \sqrt{p_n}\begin{pmatrix}\cos(g\sqrt{n+1}t) & i\frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\sin(g\sqrt{n+1}t)\\ i\frac{\sqrt{n}}{\alpha}\sin(g\sqrt{n}t) & \cos(g\sqrt{n}t)\end{pmatrix} \qquad \text{mit } p_n = e^{-\alpha^2}\frac{(\alpha^2)^n}{n!} \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein ursprünglich kohärentes Lichtfeld $|\alpha\rangle$ nach Wechselwirkung mit einem Atom im Fockzustand $|n\rangle$ befindet, ist p_n, und somit offensichtlich Poisson-verteilt. Die Poissonverteilung $p_n = e^{-\alpha^2}\frac{(\alpha^2)^n}{n!}$ hat den Mittelwert $\langle n\rangle = \alpha^2$ und die Standardabweichung $\sigma_n = \alpha$. Die Matrix hat beinahe die Form einer Drehung, mit einem Winkel, der von n abhängt. Im Wesentlichen erreicht man also durch Wechselwirkung von $|\alpha\rangle$ mit dem Atom eine Drehung des Atoms auf der Blochkugel von $g\sqrt{\langle n\rangle}t =: g\varphi$, mit einer Streuung $\sigma_n = \alpha$.

---

*bei Fragen: Henning.Moritz@physik.uni-hamburg.de

Für grosses α (was wir im Folgenden immer annehmen werden), kann man die Poissonverteilung durch eine Gaussche Verteilung um $\langle n\rangle = \alpha^2$ mit σ_n zu nähern und es macht Sinn, n in Einheiten der Standardabweichung darzustellen:

$$n = \alpha^2 + L\alpha \qquad \text{und } p_L := p_{n=\alpha^2+L\alpha} \approx \frac{e^{-L^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{wobei } p_L dL = p_n dn \text{ erfüllt ist.} \tag{5}$$

5. Definiere den kleinen Parameter $y = \frac{1}{\alpha}$ und $a = \sqrt{1+Ly}$, $b = \sqrt{1+Ly+y^2}$ sowie $\varphi = \alpha t$. Zeige, dass

$$A_L \approx \frac{e^{-L^2/4}}{(2\pi)^{1/4}} \begin{pmatrix} \cos(gb\varphi) & \frac{i}{b}\sin(gb\varphi) \\ ia\sin(ga\varphi) & \cos(ga\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt).} \tag{6}$$

6. Bei einem gleichartigen klassischen Feld würde dem Atom die idealisierte Drehung

$$U = \begin{pmatrix} \cos(g\varphi) & i\sin(g\varphi) \\ i\sin(g\varphi) & \cos(g\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{widerfahren.} \tag{7}$$

Wir wollen nun sehen, wie ähnlich A_L der idealen Drehung U ist. Die "Fidelity"

$$F = min_{|\psi\rangle} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle\psi|U^\dagger A_L|\psi\rangle|^2 dL \tag{8}$$

kann man abschätzen, indem man sie in der niedrigsten Ordnung in y bei festem φ Taylor-entwickelt. Zusätzliche Annahme: $g\varphi \ll 1$. Dabei kann man $|\psi\rangle$ so wählen, dass F minimal wird. Da die Rechnung mühsam und nicht besonders lehrreich ist, gibt es 1 Punkte für das Raten des Ergebnisses und die Interpretation und 1 Punkt sowie 2 Bonuspunkte für das explizite Ausrechnen. Dabei kann man sich auch von Mathematica helfen lassen.