Freiwillige Zusatzaufgaben zur Einführung in die Theoretische Physik I

1) a) Zeigen Sie die zyklische Invarianz des Spat-Produkts,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \;=\; \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \;=\; \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk}.

b) Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} V$ des Skalarfeldes

$$V(\vec{r}) \;=\; C\,\frac{\vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}, \quad \vec{r} \neq \vec{a}$$

(sogenanntes Dipol-Potential), wobei C eine konstante Zahl und $\vec{d}$, $\vec{a}$ konstante Vektoren sind.

2) Betrachten Sie ein freies Teilchen der Masse m und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einer Dimension. Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt das Teilchen an der Stelle x_0 in ein Medium ein, in dem es mit einer Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit des Teilchens ist, abgebremst wird.

a) Stellen Sie für $t \geq 0$ die Bewegungsgleichung des Teilchens auf.

b) Substituieren Sie $v(t) := \dot{x}(t)$ und lösen Sie das Anfangswertproblem für $v(t)$.

c) Bestimmen Sie $x(t)$ durch Integration von $v(t)$. Berechnen Sie die im Medium zurückgelegte Strecke für $t \to \infty$. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $v(t)$ und $x(t)$ für $t \geq 0$.

3) Bestimmen Sie:

a) die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe von $f(x) = e^{-x}$ um die Stelle $x = b$,

b) die Taylor-Entwicklung von $g(v/c) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ um die Stelle $v/c = 0$ bis zum quadratischen Term in v/c (einschließlich). Diese Entwicklung wird übrigens u.a. benutzt, um von der speziellen Relativitätstheorie in den nicht-relativistischen Grenzfall zu gelangen.

4) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in einer Dimension bewegen kann und auf welches eine räumlich konstante Kraft $F > 0$ wirkt.

a) Stellen Sie die Gesamtenergie auf.

b) Bestimmen Sie den Ort des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit, d.h. $x(t)$, für das Anfangswertproblem $x(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$, wobei $v_0 > 0$, mit Hilfe der Lösungsmethode für eindimensionale Probleme, die in der Vorlesung aus der Energie-Erhaltung entwickelt wurde. (Diese Aufgabe dient als Übung für die sogenannte Energiemethode und soll nicht durch Lösung der Newton'schen Bewegungsgleichung bearbeitet werden.)

5) Betrachten Sie N identische, geladene Teilchen. Die Masse eines Teilchens sei m. Im Koordinatenursprung befinde sich eine massive, unbewegliche, geladene Kugel. Diese Kugel erzeugt das Kraftfeld:

$$\vec{F}_{ext}(\vec{x}) = -\frac{\alpha}{|\vec{x}|^3}\vec{x},$$

welches alle N Teilchen spüren. Die Wechselwirkungkraft vom j-ten Teilchen auf das i-te Teilchen ($i \neq j$), $\vec{F}_{ji}$, soll nur vom Abstand der beiden Teilchen, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, abhängen. Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls erhalten ist. Wäre der Gesamtdrehimpuls auch erhalten, wenn man den Koordinatenursprung in den Punkt $\vec{a} \neq \vec{0}$ (relativ zur massiven Kugel) legte?