Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben zur Einführung in die Theoretische Physik I

1) a) Das Spat-Produkt ist zyklisch invariant, da ϵ_{ijk} invariant ist unter zyklischen Vertauschungen von i, j, k: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\; a_i\; b_j\; c_k == \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{kij}\; a_i\; b_j\; c_k = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

b) Geschrieben in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ mit Basisvektoren $\vec{e}_i$,

$$\vec{\nabla} V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) \right) \vec{e}_i, \qquad V(\vec{x}) = C \left(\sum_{j=1}^{3} d_j (x_j - a_j) \right) \left(\sum_{k=1}^{3} (x_k - a_k)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Die Komponenten sind

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} V(\vec{x}) \right)_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) \\ &= C \left[\left(\sum_{i=1}^{3} d_j \delta_{ij} \right) |\vec{x} - \vec{a}|^{-3} \;-\; \frac{3}{2}\, \vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) |\vec{x} - \vec{a}|^{-5} \left(2 \sum_{i=1}^{3} (x_k - a_k) \delta_{ik} \right) \right] \\ &= C \left[d_i \,|\vec{x} - \vec{a}|^{-3} \;-\; 3\, \vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) |\vec{x} - \vec{a}|^{-5} (x_i - a_i) \right], \end{aligned}$$

und damit haben wir

$$\vec{\nabla} V(\vec{x}) \;=\; C \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|^3}\, \vec{d} \;-\; \frac{3 \vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{x} - \vec{a}|^5}\, (\vec{x} - \vec{a}) \right].$$

2) a) Wir schreiben die auf das Teilchen wirkende Reibungskraft als $F_R = -m\gamma \dot{x}(t)$ und erhalten

$$m\ddot{x}(t) = -m\gamma \dot{x}(t), \quad \gamma \in \mathbb{R}^{>0}.$$

b) Mit der Substitution $v(t) := \dot{x}(t)$ ehält man folgende Differentialgleichung erster Ordnung für $v(t)$

$$m\dot{v}(t) = -m\gamma v(t) \Leftrightarrow \dot{v}(t) = -\gamma v(t).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist elementar (“e-Funktion“) und gegeben durch

$$v(t) = Ce^{-\gamma t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen die Konstante C durch die Anfanfsbedingung $v(t = 0) = v_0$, d.h. $C = v_0$. Die Lösung des Anfangswertproblems für $v(t)$ lautet also

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t}.$$

c) Wir integrieren $v(t)$ und erhalten

$$\begin{aligned} x(t)-x_0 &= \int\limits_0^t v(t')dt' = v_0\int\limits_0^t e^{-\gamma t'}\,dt' = -\frac{v_0}{\gamma}[e^{-\gamma t'}]_0^t = \frac{v_0}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}) \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{v_0}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}) + x_0. \end{aligned}$$

Für die im Medium zurückgelegte Strecke gilt

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-x_0) = \lim_{t\to\infty}\frac{v_0}{\gamma}(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}) = \frac{v_0}{\gamma}.$$

3) a)

$$f(x) \approx e^{-b} - e^{-b}(x-b) + \frac{1}{2}e^{-b}(x-b)^2 - \frac{1}{6}e^{-b}(x-b)^3$$

b)

$$g(v/c) \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

(der in v/c lineare Term verschwindet, weil $g'(0)=0$).

4) a)

$$E = \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} - F\,x(t)$$

b) nach $\dot{x}$ umstellen und nur positive Wurzel berücksichtigen ($v_0, F > 0$):

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}(E + F\,x(t))}$$

Trennung der Variablen:

$$\int_0^t d\tau = \int_0^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E+F\,x')}}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2E}}\int_0^{x(t)}\frac{dx'}{\sqrt{1+\frac{F}{E}\,x'}}$$

Variablensubstitution: $\eta := \frac{F}{E}\,x'$, d.h. $dx' = \frac{E}{F}\,d\eta$, und somit:

$$\begin{aligned} t &= F^{-1}\sqrt{\frac{mE}{2}}\int_0^{\frac{F}{E}x(t)}\frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta}} \\ &= F^{-1}\sqrt{\frac{mE}{2}}\left[2\sqrt{1+\eta}\right]_0^{\frac{F}{E}x(t)} \\ &= F^{-1}\sqrt{2mE}\left(\sqrt{1+\frac{F}{E}x(t)}-1\right) \end{aligned}$$

Nach $x(t)$ umgestellt:

$$x(t) = \frac{E}{F}\left[\left(\frac{Ft}{\sqrt{2mE}}+1\right)^2 - 1\right]$$

Nutze die bekannte Energie zur Zeit $t=0$, um das Anfangswertproblem zu lösen: $E = \frac{mv_0^2}{2}$.

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_0\,t$$

5) Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m\vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Für das i-te Teilchen gilt die Bewungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}_i} = \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i) + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{F}_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^{N} \Big(m\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times (m\ddot{\vec{r}_i}) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i) + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right)
\end{aligned}$$

Aufgrund von actio = reactio, d.h. $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$, verschwindet der zweite Term, denn:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0
\end{aligned}$$

($\vec{F}_{ji}$ ist parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_j$). Damit gilt

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (-\frac{\alpha}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i) = 0$$

Bei einer nicht-trivialen Verschiebung des Koordinatenursprunges ist der Gesamtdrehimpuls nicht erhalten, da in diesem Fall $\vec{r}_i$ nicht parallel zu $\vec{F}_{ext}(\vec{r}_i)$ ist.