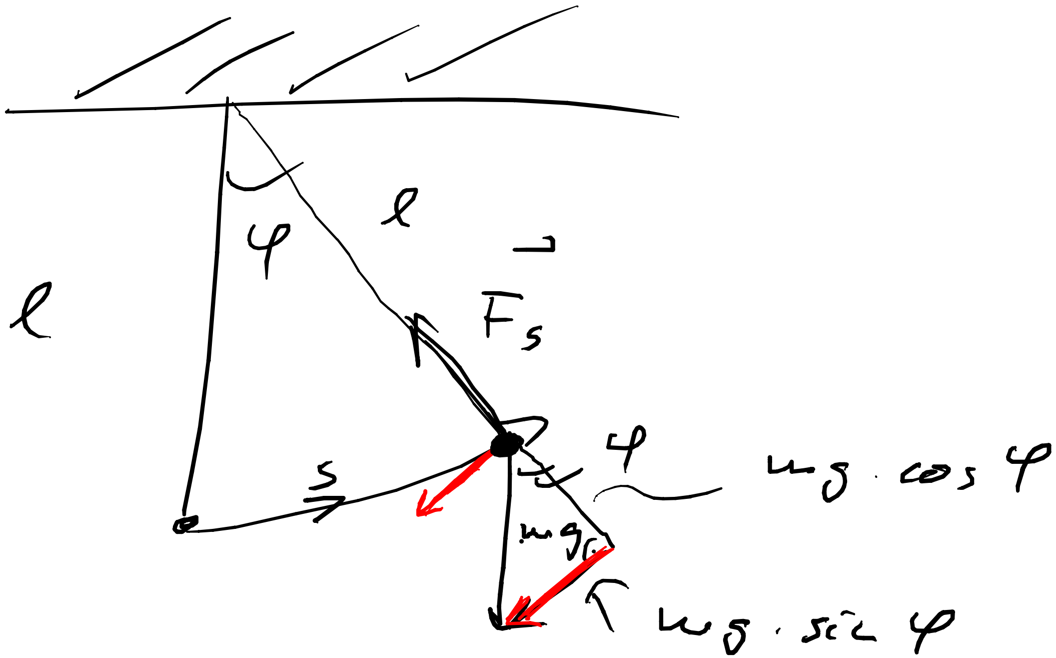
"mathematisches Pendel"

→ Punktmasse, masseloser Faden



für Tangentialkomponente

$$-mg \cdot \sin\varphi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s = \ell \cdot \varphi$$

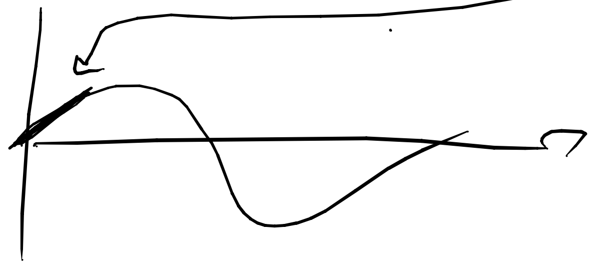
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \qquad (l = const)$$

$$\Rightarrow \quad - g \cdot \sin \varphi = l \cdot \ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ Schwingung unabhängig von der Masse

↳ Lösung für kleine Winkel $\varphi \lesssim 10°$

$$\sin \varphi \simeq \varphi - \cancel{\frac{1}{3!} \varphi^3}$$



mit $\sin \varphi \simeq \varphi$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \varphi$$

analog zur Feder

$\frac{g}{l}$ entspricht $\frac{k_F}{m}$

$\rightarrow \quad \omega^2 \equiv \frac{g}{l}$

$$\ddot{\varphi} = - \omega^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

unabh. von Amplitude

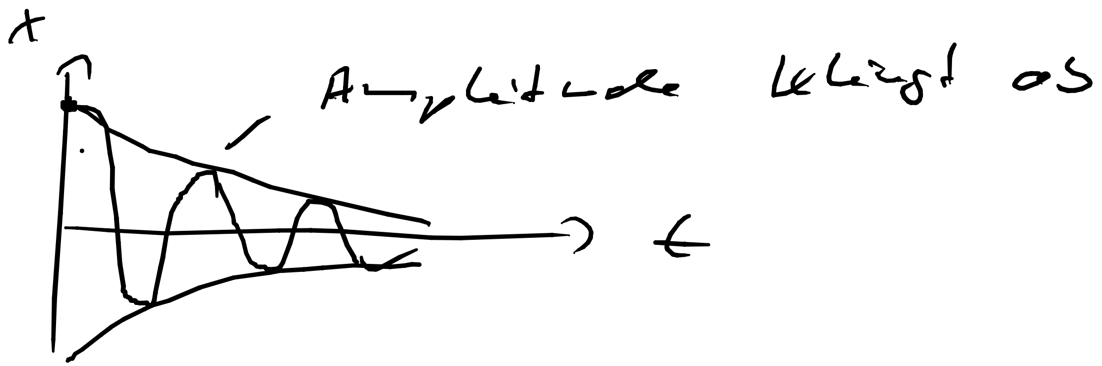
(NB: gilt nur für kleine Amplituden)

gedämpfte Schwingung

→ Bsp ① : Pendel in Honig (Stoßdämpfer)

→ keine vollständige Schwingung ≡ stark gedämpft (überdämpft)

② Kinderschaukel ≡ schwach gedämpft (unterdämpft)



↳ es wirke <u>lineare</u> Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -\delta \vec{v}$$

→ mit Newton:

$$m\ddot{x} = -k_F \cdot x - \delta v =$$

$$= -kx - \delta \dot{x}$$

↳ <u>Ansatz:</u> $x = e^{\lambda t}$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$m \lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + k \cancel{e^{\lambda t}} + b \lambda \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\rightarrow \quad m \lambda^2 + k + b\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} =$$

$$= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\rightarrow$ Fallunterscheidung $\sqrt{x}$, $x \gtreqless 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{2m} \gtreqless \omega_0 \; ?$$

(1) $\frac{b}{2m} > \omega_0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_- \rightarrow$ überdämpft

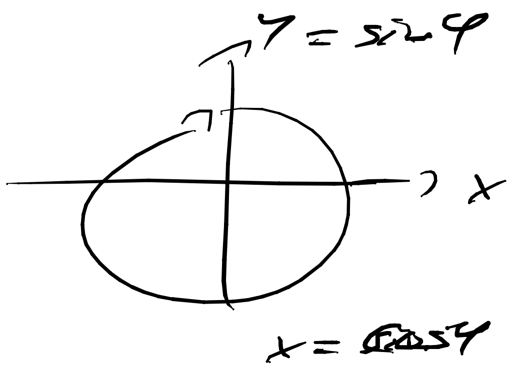
(2) $\frac{b}{2m} = \omega_0 \Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall = minimale Zeit, damit System wieder in Ruhelage

$$x = e^{-\frac{b}{2m} \cdot t}$$

(3) $\frac{b}{2m} < \omega_0 \Rightarrow \sqrt{x}$ nicht def. in $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$\lambda \in \mathbb{C} \rightarrow e^{i\lambda t}$



s. Mathe $e^{i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi =$

$=$ Schwingung

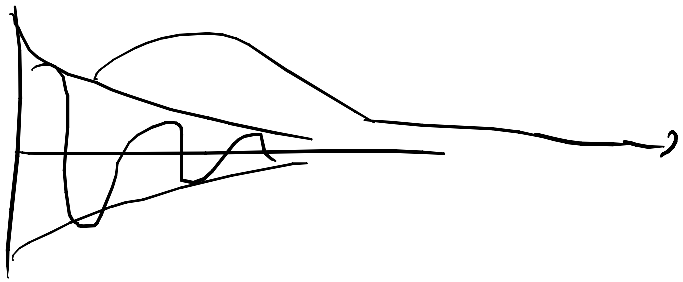
$\rightarrow$ Amplitude $\equiv$ Betrag

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{A_0 \, e^{-\frac{b}{2m} \cdot t}}_{= \text{exp. abfallende Amplitude}} \cdot \cos(\omega^* \cdot t + \delta)$$

mit $\omega^* = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}$

ist eine sehr schwache Dämpfung für $\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$

$\rightarrow \quad \underline{\underline{\omega^* \approx \omega}}$



$\rightarrow$ Einhüllende = expon. Dämpfung

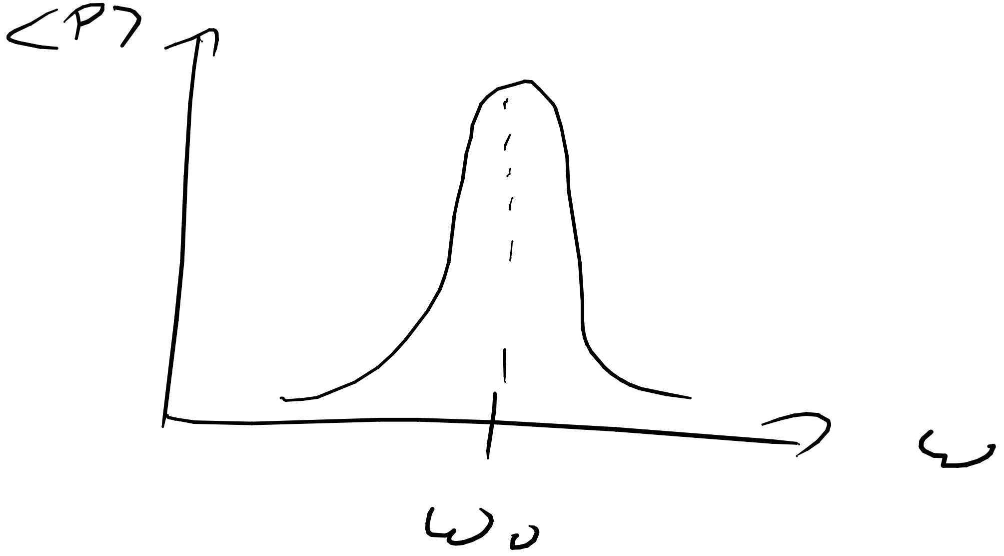
erzwungene Schwingung und Resonanz

→ ∃ <u>Eigenfrequenz</u> $\equiv \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ohne treibende Kraft

→ Resonanz für $\omega_{\text{treiber}} \simeq \omega_0$

↳ Resonanzkurve = mittlere zugeführte Leistung pro Schwingung $\langle P \rangle$



↳ externe, treibende Kraft

$$F_{ex} = F_0 \cdot \cos \omega t$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = F_{ex} + F_R + F_x$$

$$F_x = -kx = m\omega_0^2 x$$

$$\Rightarrow \underbrace{m\ddot{x} + b\dot{x} + m\omega_0^2 x}_{(*)} = F_0 \cdot \cos \omega t$$

man findet allgem. Lösung,

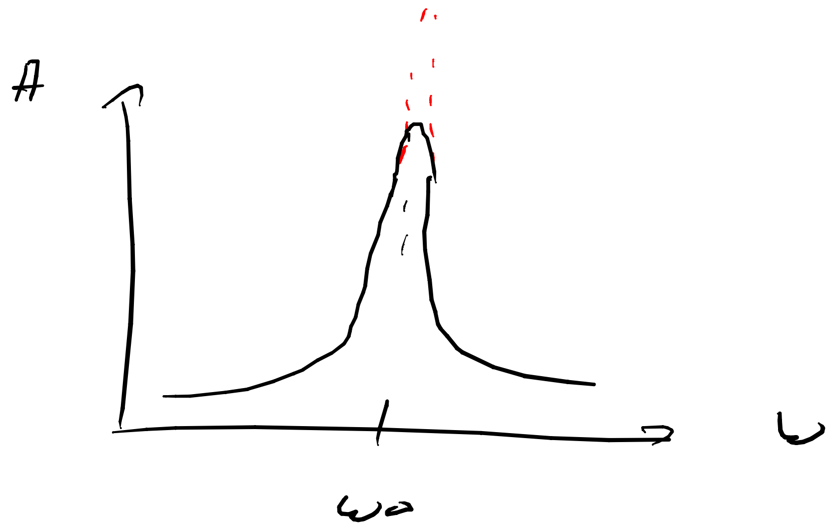
indem man $(*) \equiv 0$ (↳ exp. abklingende Eigenschw.)

plus partikuläre, stationäre Lösung

mit Ansatz $x = A \cos(\omega t - \delta)$

Phasenverschiebung

$$\rightarrow \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + b^2\omega^2}}$$



für $b = 0$

$A \rightarrow \infty$

@ $\omega = \omega_0$

$$\tan \delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

mit

$$\omega \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \delta \simeq 0$$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \delta \simeq \pi$$

$$\Rightarrow \quad \delta \in [0; \pi] \quad \Rightarrow$$ Phase des Oszillators <u>hinter</u> der Phase d. Treibers