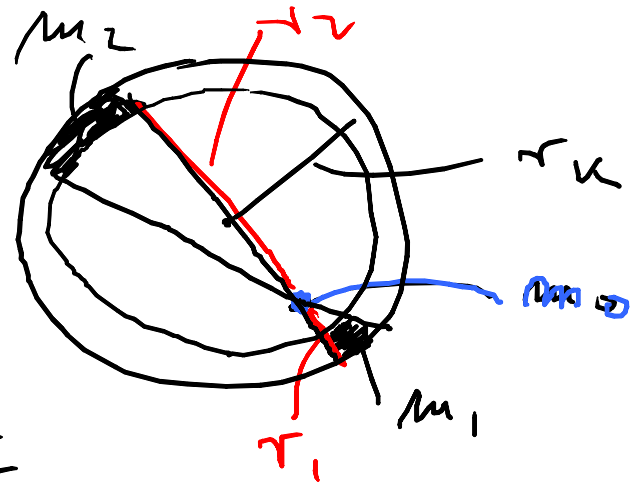
⋮

Gravitationsfeld einer Vollkugel (= massive Kugel) für einen Punkt außerhalb der Kugel ist genauso groß als wenn die Gesamtmasse der Kugel im Mittelpunkt vereint wäre.

Betrachte Kugelschale und Masse m_0 innerhalb der Schale:



$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

$$F_1 \sim \frac{m_1 m_0}{r_1^2} \qquad F_2 \sim \frac{m_2 m_0}{r_2^2}$$

$\rightarrow$ Da Gravitationkraft $\propto \frac{1}{r^2}$ heben sich die Gravitationskraft von m_1 und m_2 auf:

m_2 ist größer ABER weiter weg.

SCHWINGUNGEN

harmonische Schwingungen

Bsp.: "Hooke'sche Gesetz"

$$F_x = -k_F \cdot x = m \cdot a_x$$

Federkonstante

$$\Rightarrow a_x = -\frac{k_F}{m} \cdot x \quad (*)$$ mit Ruhelage $x = 0$

$$\boxed{a_x \propto -x}$$

Harmonische Schw. herrscht vor wenn die Beschleunigung eines Körpers proportional zur Auslenkung aus Ruhelage ist und stets zu dieser hingerichtet ist

↳ Schwingungsperiode: T = Zeit für eine vollständige Schw.

↳ Frequenz: $f = \frac{1}{T}$; $[f] = 1\,Hz = 1\,s^{-1}$ "Hertz"

↳ Ort und Zeit Funktion für harmonische Schwingung

allgemeine Gleichung:

$$x = A \cdot \cos\underbrace{(\omega t + \delta)}_{\text{"Phase" mit Phasenkonstante } \delta} \qquad (**)$$

Amplitude

$A = x_{max}$

δ = Phase bei $t = 0$

<u>Beachte:</u> $\cos(\omega t + \delta) = \sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$$

→ 2 schwingende Systeme mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlichen Anfangsphasen:

$$x_1 = A \cos(\omega t)$$

$$x_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

↳ für $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ sind beide "in Phase": $x_2(t) = x_1(t)$

für $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ gilt

$$x_2(t) = -x_1(t)$$

↳ (**) ist Lösung von (*) $a_x = -\frac{k_F}{m} x$

$x = A \cos(\omega t + \delta)$ is Lösung von $a_x = -\frac{k_F}{m} x$

Beweis: $x = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \qquad (***)$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{A \cos(\omega t + \delta)}_{= x}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = -\omega^2 x \\ a_x = -\frac{k}{m} x \end{array}\right\} \longrightarrow a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_F}{m} x = -\omega^2 x$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{k_F}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$$

Anfangsbedingungen:

(**) hat zwei freie Parameter: A und δ

$$x_0 = x(t=0) = A\cos(\omega\cdot 0+\delta) = A\cdot\cos(\delta) \quad (1)$$

$$v_{x,0} = v(t=0) = -\omega A\sin(\omega\cdot 0+\delta) = -\omega A\sin(\delta) \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{v_{x,0}}{x_0} = -\frac{\omega\cdot\sin(\delta)}{\cos\delta}\cdot\frac{\cancel{A}}{\cancel{A}} = -\omega\tan(\delta)$$

$$\Rightarrow \delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_{x0}}{x_0\cdot\omega}\right)$$

δ in (1) einsetzen: $A = \ldots\ldots$

↳ Schwingungsperiode T

$$x(t+T) = x(t)$$

$$A\cos[\omega(t+T)+\delta] = A\cos(\omega t+\delta)$$

$$\underbrace{A\cos[\omega t+\delta}\,+\,\omega T] = \underbrace{A\cos(\omega t+\delta)}$$

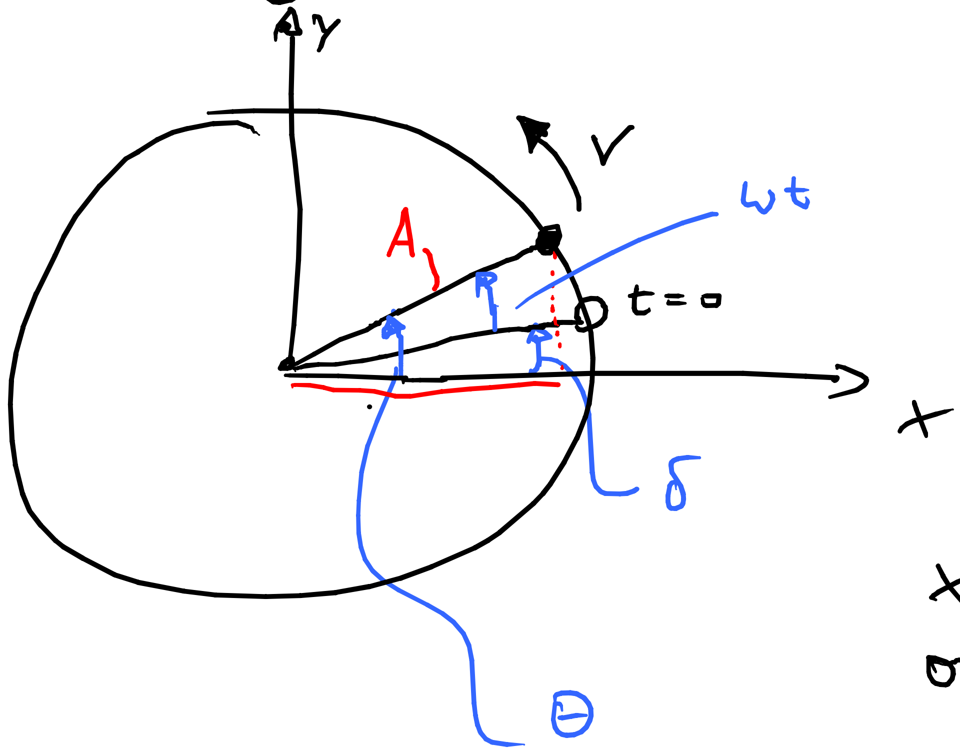
$$\omega T = 2\pi\cdot n \quad ; \; n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \omega = \text{"Kreisfrequenz"}$$

$$\rightarrow \boxed{f} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\,\omega = \boxed{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_F}{m}}}$$

Frequenz ist unabhängig von Amplitude.

Kreisbewegung und harmonische Schwingung.



$$\Theta = \omega t + \delta \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\Theta}{dt} = \omega$$

x - Koordinate des Teilchen-ortes

$$x = A \cos \Theta$$

⇒ Projektion einer Kreisbewegung mit $\omega = \text{const.}$ ist eine harmonische Schwingung.

→ Energie des harmonischen Oszillators (z.B. Feder, ...)

von früher:

Epot = potentielle Energie: $E_{pot,Feder} = \frac{1}{2} k_F x^2$

harmonische Bewegung: $x = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2} k_F A^2 \cos^2(\omega t + \delta)}$$

Ekin := kinetische Energie: $E = \frac{1}{2} m v_x^2$

$(***) = \quad v_x = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$

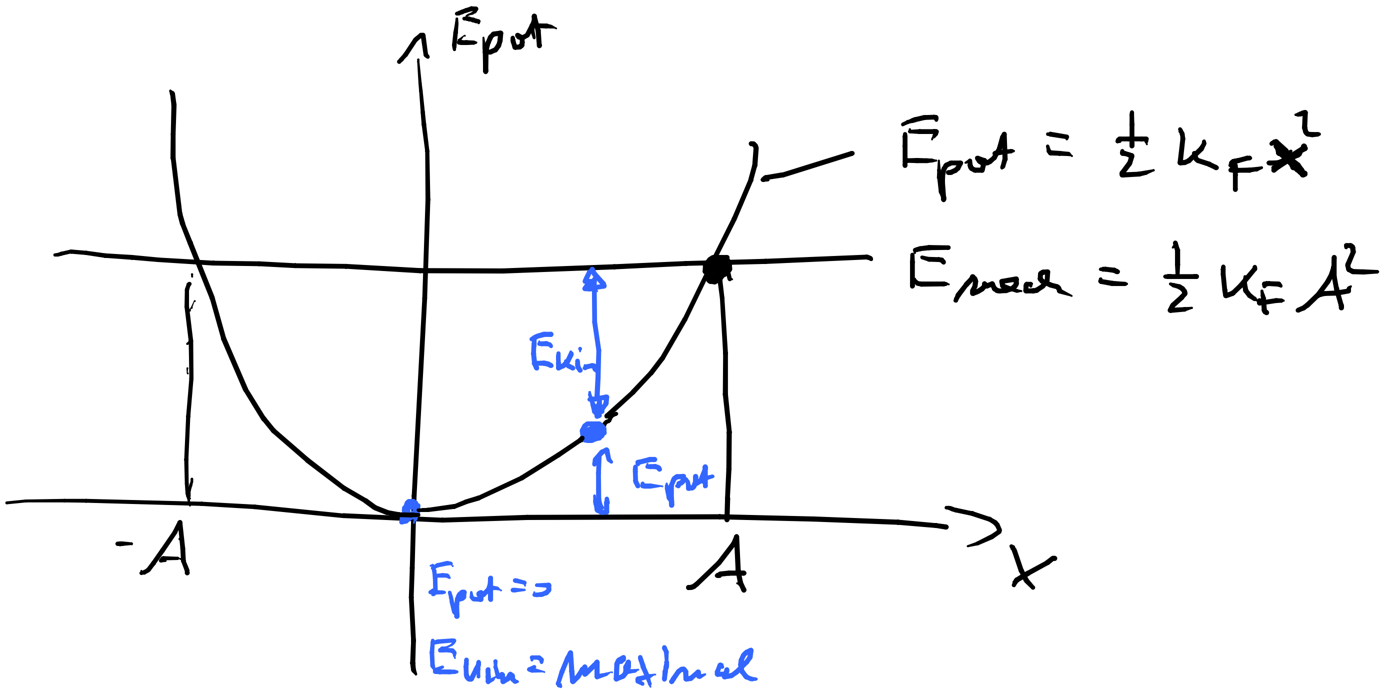
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$\left(\omega^2 = \frac{k_F}{m}\right)$ einsetzen $\quad \boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} k_F A^2 \sin^2(\omega t + \delta)}$

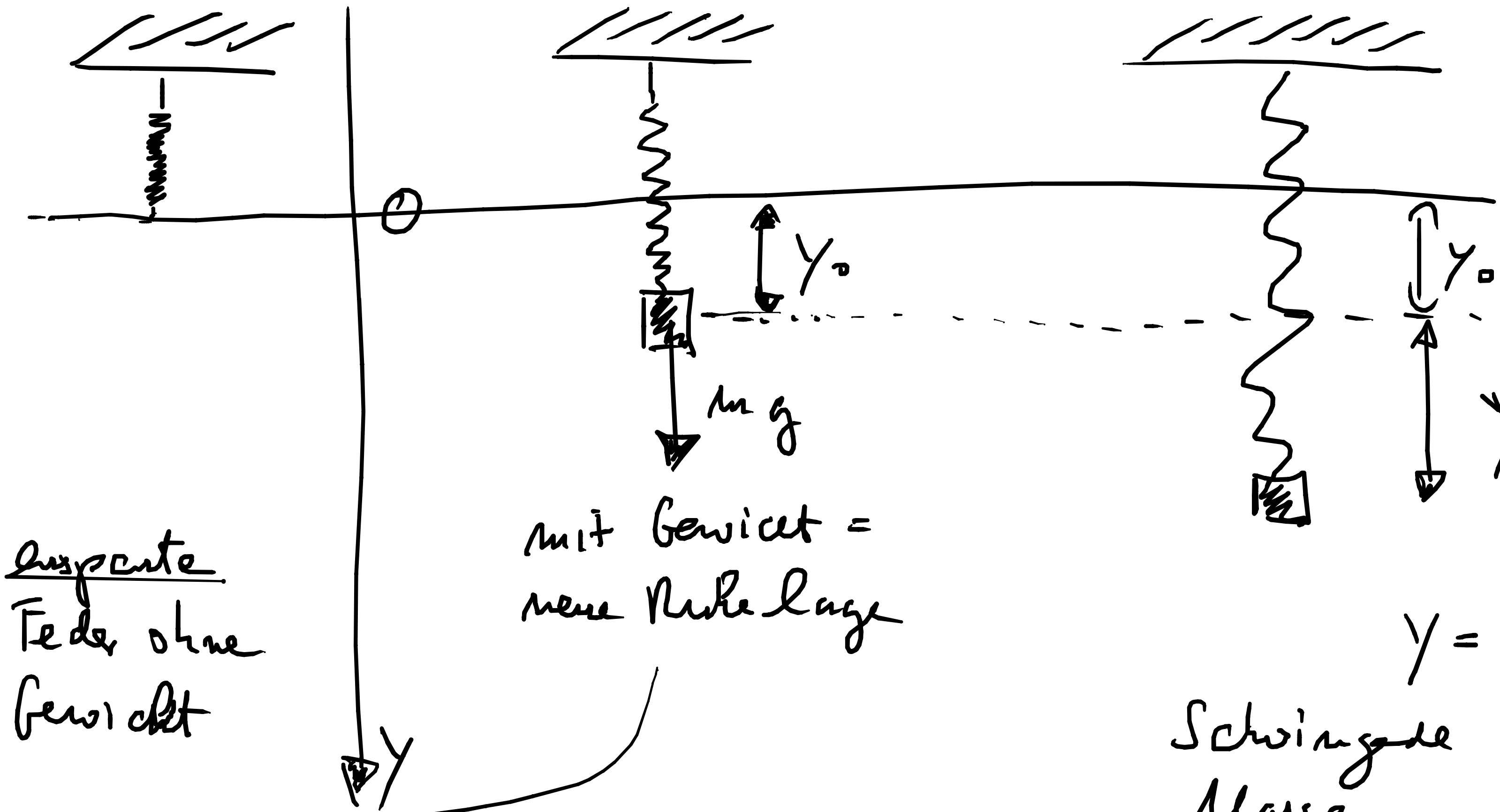
Gesamt Energie

$$\boxed{E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} k_F A^2}$$

da $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



Bsp: vertikale Federschwingung im Erdgravitationsfeld



entspannte Feder ohne Gewicht

mit Gewicht = neue Ruhelage

$y = y_0 + y'$

Schwingende Masse

→ Gesamtkraft auf neue Ruhelage = 0

$$0 = \underbrace{-k_F\, y}_{\text{Federkraft}} + \underbrace{m \cdot g}_{\text{Gewichtskraft}} \quad \Rightarrow \quad k_F\, y = m \cdot g$$

$$y_0 = \frac{m \cdot g}{k_F}$$

Schwingung um y_0 herum mit Auslenkung y'

$$y' = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

Gewichtskraft bewirkt „nur“ Verschiebung der Ruhelage

von $y = 0 \rightarrow y' = 0$ $\quad (y = y_0)$