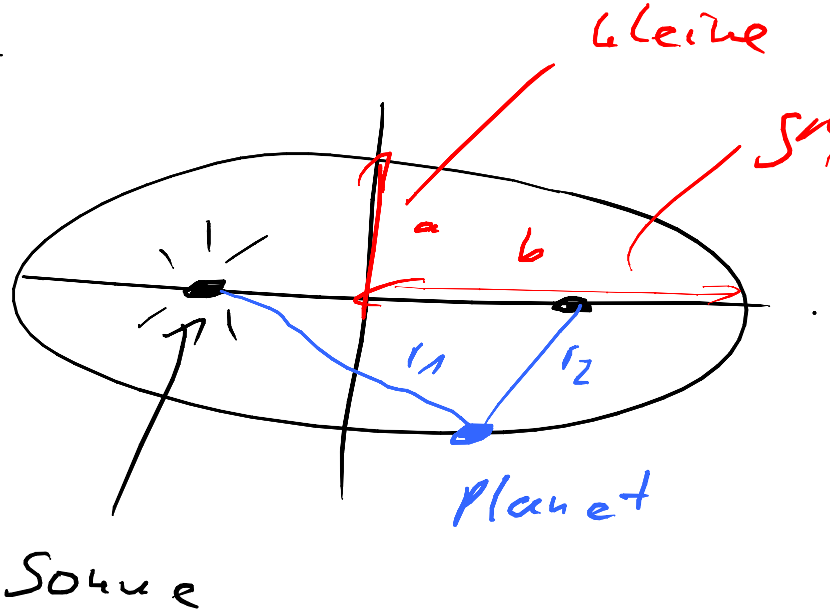
Gravitation

→ Keplersche Gesetze (~ 1619)

① Umlaufbahnen d. Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne ist



Def.: Ellipse: $r_1 + r_2 \equiv const$

Spezialfall $r_1 = r_2 \equiv r$

↳ mittlere Entfernung

Erde – Sonne ≅ 150 Mio km ≡ 1 AE

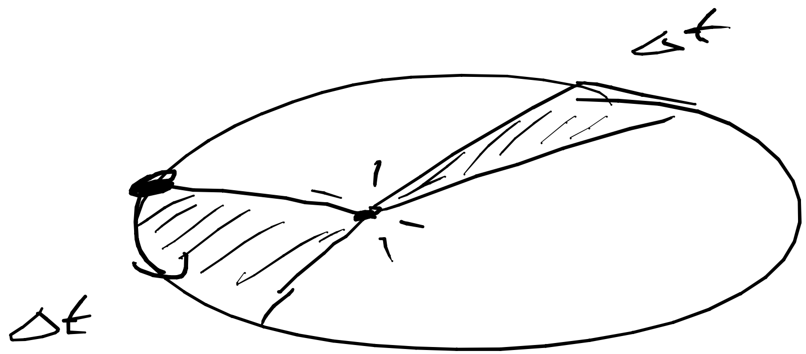
Astronom. Einheit

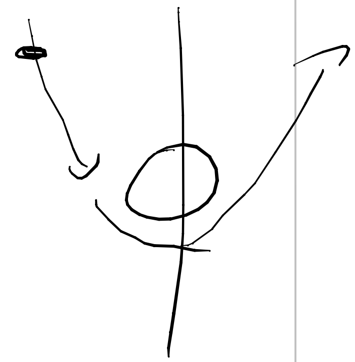
(2) (Flächensatz)

Verbindungslinie Sonne – Planet

überstreicht in gleichen Zeitintervallen

gleiche Fläche





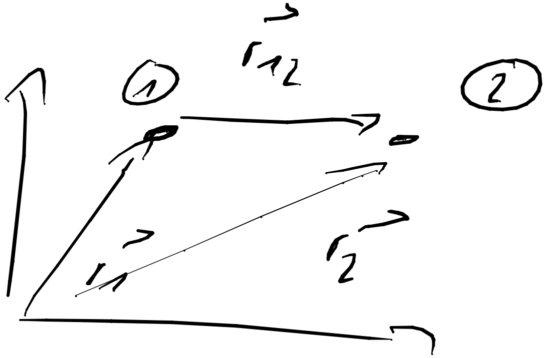
(3) mit $r \equiv$ mittlere Entfernung zur Sonne

Umlaufszeit T

$$T^2 = \text{const} \cdot r^3$$

Newtonsches Gravitationsgesetz

(~ 1686)



$$\vec{F}_2^{(1)} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Kraft von 1 auf 2

$$\vec{F}_1^{(2)} = - \vec{F}_2^{(1)}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$\rightarrow \quad F = \underbrace{m \cdot a}_{\text{Newton}} = \underbrace{- G \frac{m_{Erde} \cdot m}{r^2}}_{\text{Newton Gravitation}}$$

m_t = träge Masse

m_s = schwere Masse

$$m_t \stackrel{?}{=} m_s$$

Sei $m_s \neq m_t$

$$\Rightarrow \quad a_G = \frac{F}{m_t} = -\left(\frac{G\, m_{Erde}}{r^2}\right) \cdot \frac{m_s}{m_t}$$

$\hookrightarrow$ experimentell:

a_G gleich für alle Körper

$$\Rightarrow \quad \frac{m_s}{m_t} = \text{const}$$

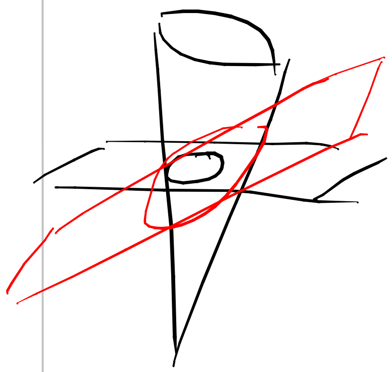
$$\Rightarrow \quad m_s \equiv m_t$$

$\Rightarrow$ Betrag und Einheit von G festgelegt

$\rightarrow$ Herleitung Kepler aus Newton

(1) $\frac{1}{r^2}$ - Kraftfeld

man kann zeigen, dass Bahnen Kegelschnitte



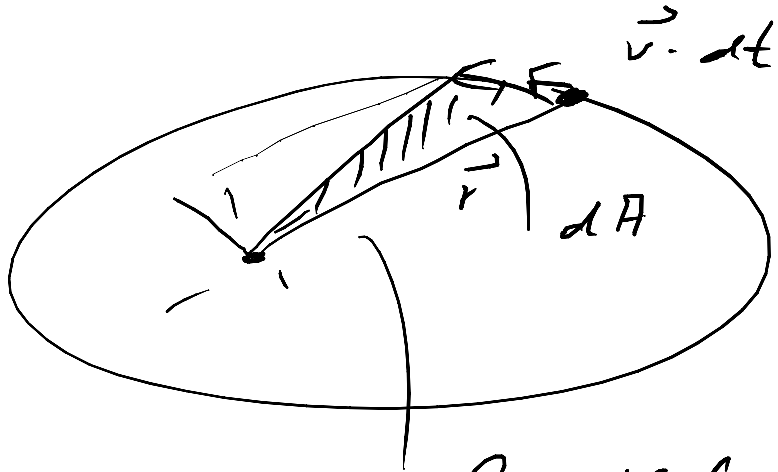
$\Downarrow$

Ellipsen, Parabel oder Hyperbel

$\downarrow$

einzige periodische (geschlossene) Bahn

(2)



Parallelogramm aus

$\vec r \times \vec v\, dt$

Fläche: $d\vec A = \frac{1}{2} \cdot \vec r \times \vec v\, dt =$

$= \frac{1}{2m}\, \vec r \times \underbrace{m \vec v}_{\vec p} \cdot dt =$

$= \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{= \vec L}$ (s. Schwerelehre)

$\Rightarrow \frac{d\vec A}{dt} = \frac{1}{2m} \vec L$

↳ Kraft zw. Sonne u. Erde

wirkt nur entlang von $\vec{r}$

$\Rightarrow$ kein Drehmoment

$\Rightarrow$ $\vec{L} = \text{const}$

$\Rightarrow$ $\frac{d\vec{A}}{dt} = \text{const}$ $\Rightarrow$ (2)

(3) Anhand Spezialfall Kreisbahn

Gravitation $\Rightarrow$ Zentripetal-beschl.

$$\Rightarrow \quad - G \, \frac{m_{Sonne} \cdot \cancel{m_{Erde}}}{r^{\cancel{2}}} = - \cancel{m_{Erde}} \, \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{G m_S}{r}$$

$$\rightarrow \quad \text{Umlaufzeit } T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Big| ^2$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G m_S}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_S} \cdot r^3} = 3$$

→ potentielle Energie d. Gravitation

↳ $dE_{pot} = -F\,dr = -\left(-G\,\frac{m_E m}{r^2}\right)dr$

↑ radiales Problem

$\Rightarrow\ E_{pot} = \int dE_{pot} = -\frac{G m_E m}{r} + E_{pot,0}$

↓ Referenz: zB: Erdoberfläche

allgemein $E_{pot} \to 0$ für $r \to \infty$

$\Rightarrow\ E_{pot,0} \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad E_{pot} = -G\frac{m_E m}{r} < 0$$

$\Rightarrow$ bei Annäherung wird Arbeit frei

$\rightarrow$ Fluchtgeschwindigkeit $\equiv$

$\equiv$ minimale Geschw., um Gravitationsfeld zu verlassen, d.h. $r \to \infty$

$$E_{kin,\infty} + E_{pot,\infty} = E_{kin,0} + E_{pot,0}$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m v_F^2 - G\frac{m_E m}{r_E}$$

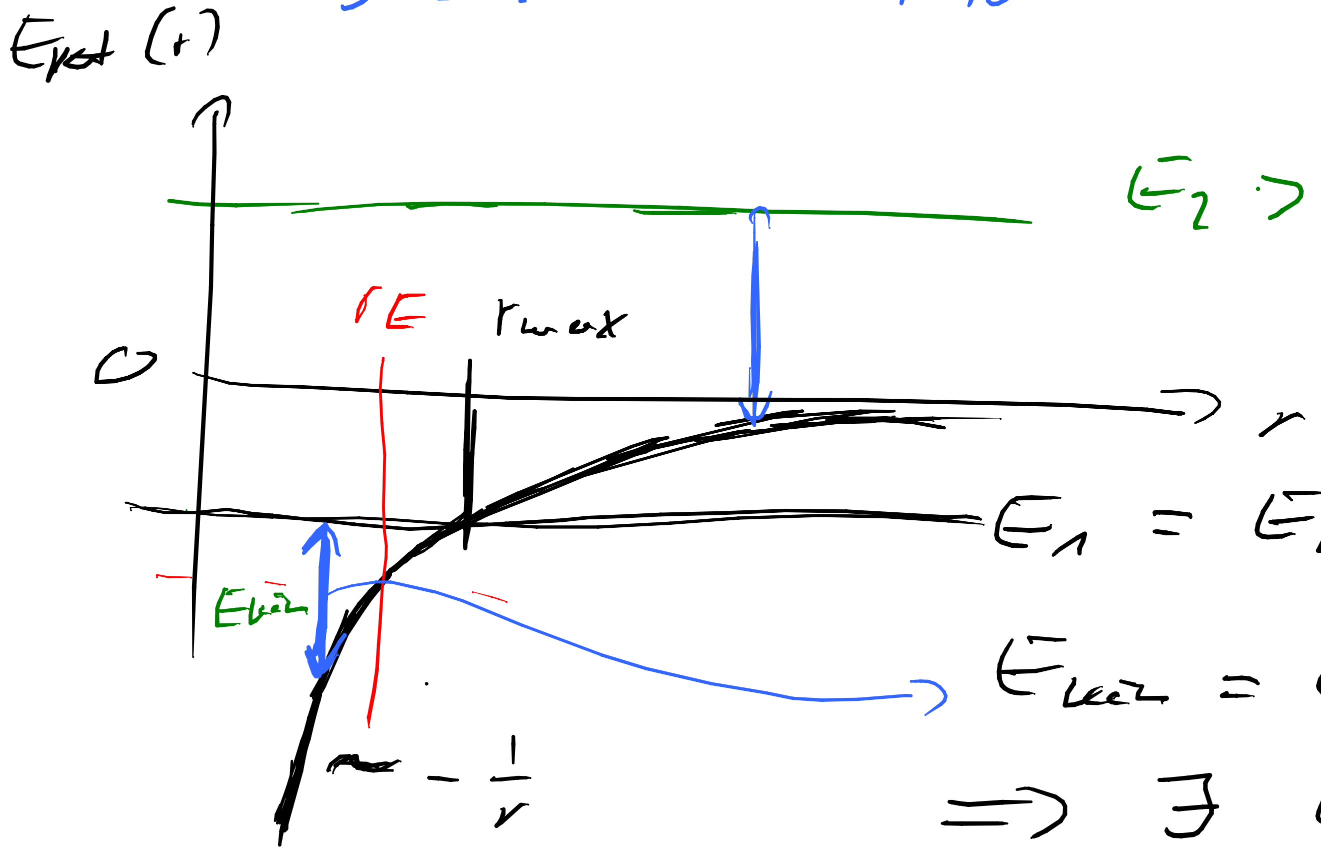
$$\Rightarrow v_{Flucht} = \sqrt{\frac{2 G m_E}{r_E}} =$$

$$= 11.2 \text{ km/s} \mathrel{\hat{=}} 40.000 \text{ km/h}$$

→ gebundene / ungebundene Bahn

gebundene $\Downarrow$ $\exists\, r_{max}$

ungebundene $\Downarrow$ $r \to \infty$



$E_2 > 0 \Rightarrow E_{kin} > 0$

$\Rightarrow r \to \infty$

$E_1 = E_{kin} + E_{pot} < 0$

$E_{kin} = E_1 - E_{pot} \overset{!}{\geq} 0$

$\Rightarrow \exists\, \max(r) = r_{max}$