Übungen zur Einführung in die Physik der Quantengase

Blatt 2, mit Lösungen

Übung 2: Optische Blochgleichung mit zeitabhängiger Wechselwirkung

(a) Wir lassen jetzt zu, dass der Wechselwirkungswinkel aus Übung 1(d) zeitabhängig ist: $\theta = \theta(t)$. Zeigen Sie dass die optische Blochgleichung in der Eigenbasis $|\pm\rangle$ aus Übung 1(d) lautet ($\rho_{\pm\pm} \equiv \langle\pm|\rho|\pm\rangle$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho_{--} & \rho_{-+} \\ \rho_{+-} & \rho_{++} \end{pmatrix} = -i\Omega\ sign(\delta)\begin{pmatrix} 0 & \rho_{-+} \\ -\rho_{+-} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial\theta}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho_{+-}+\rho_{-+} & \rho_{++}-\rho_{--} \\ \rho_{++}-\rho_{--} & -\rho_{+-}-\rho_{-+} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Für die Matrixelemente des Dichteoperators gilt in jeder Basis

$$\langle n|\frac{\partial}{\partial t}\rho|m\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle n|\rho|m\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\langle n|\right)\rho|m\rangle - \langle n|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}|m\rangle\right) .$$

Betrachten Sie die von Neumann_Gleichung in der Eigenbasis von H. In dieser Basis gilt

$$H = \begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix} .$$

Lösung

In der Eigenbasis von_H lautet der Kommutator $[H,\rho]$:

$$\begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{--} & \rho_{-+} \\ \rho_{+-} & \rho_{++} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{--} & \rho_{-+} \\ \rho_{+-} & \rho_{++} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix} = -\hbar\Omega\ sign(\delta)\begin{pmatrix} 0 & \rho_{-+} \\ -\rho_{+-} & 0 \end{pmatrix}$$

Für zeitabhängiges θ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}|+\rangle = -\dot{\theta}\cos(\theta)|g\rangle - \dot{\theta}\sin(\theta)|e\rangle = -\dot{\theta}|-\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|-\rangle = -\dot{\theta}\sin(\theta)|g\rangle + \dot{\theta}\cos(\theta)|e\rangle = \dot{\theta}|+\rangle$$

Allgemein gilt $\left\langle n\right|\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|m\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle n\right|\rho\left|m\right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle n\right|\right)\rho\left|m\right\rangle - \left\langle n\right|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|m\right\rangle\right)$ und somit

$$\left\langle +\right|\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|+\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle +\right|\rho\left|+\right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle +\right|\right)\rho\left|+\right\rangle - \left\langle +\right|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|+\right\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{++} + \dot{\theta}\,\rho_{-+} + \dot{\theta}\,\rho_{+-}$$

$$\left\langle -\right|\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|-\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle -\right|\rho\left|-\right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle -\right|\right)\rho\left|-\right\rangle - \left\langle -\right|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|-\right\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{--} - \dot{\theta}\,\rho_{+-} - \dot{\theta}\,\rho_{-+}$$

$$\left\langle +\right|\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|-\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle +\right|\rho\left|-\right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle +\right|\right)\rho\left|-\right\rangle - \left\langle +\right|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|-\right\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{+-} + \dot{\theta}\,\rho_{--} - \dot{\theta}\,\rho_{++}$$

$$\left\langle -\right|\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|+\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left\langle -\right|\rho\left|+\right\rangle - \left(\frac{\partial}{\partial t}\left\langle -\right|\right)\rho\left|+\right\rangle - \left\langle -\right|\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left|+\right\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{-+} - \dot{\theta}\,\rho_{++} + \dot{\theta}\,\rho_{--}$$

Die von Neuman-Gleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\rho = \left[H,\rho\right]$ lautet also in der Eigenbasis von H:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho_{--} & \rho_{-+} \\ \rho_{+-} & \rho_{++} \end{pmatrix} = -i\Omega\; sign(\delta)\begin{pmatrix} 0 & \rho_{-+} \\ -\rho_{+-} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial\theta}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho_{+-}+\rho_{-+} & \rho_{++}-\rho_{--} \\ \rho_{++}-\rho_{--} & -\rho_{+-}-\rho_{-+} \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie mit (a), dass der Blochvektor $\vec{\tilde{B}} = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) = (\rho_{-+}+\rho_{+-}\ ,\ i\left(\rho_{-+}-\rho_{+-}\right)\ ,\ \rho_{++}-\rho_{--})$ in der Eigenbasis von H die Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{F}}\times\vec{\tilde{B}}$ erfüllt mit $\vec{\tilde{F}} = (0,-2\frac{\partial\theta}{\partial t},\ \Omega\ sig(\delta))$. Diskutieren Sie anhand der Blochkugel die Zeitentwicklung für den Fall einer adiabatischen Änderung von θ, i.e., $\frac{\partial\theta}{\partial t} << \Omega$. Nehmen Sie dazu an, Sie verändern die Verstimmung δ adiabatisch von stark negativen zu stark positiven Werten. Was geschieht in der Basis der Eigenzustände des ungestörten Atoms.

Nehmen Sie an, Ihr Ziel ist es, das System zu invertieren (i.e. nach der Zeitentwicklung ist die Inversion $w = 1$). Was ist der Vorteil einer adiabatischen Zeitentwicklung gegenüber eines π-puls. (Bei einem π -Puls wird das koppelnde Feld resonant für genau einen halben Rabi-Zyklus eingeschaltet, sodass man das System vollständig invertiert)

Lösung

Aus (a) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{-+}+\rho_{+-}\right) = -\Omega\ sign(\delta)\ i\left(\rho_{-+}-\rho_{+-}\right) \ + \ \frac{\partial\theta}{\partial t}\ 2\left(\rho_{++}-\rho_{--}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i\left(\rho_{-+}-\rho_{+-}\right) = \Omega\ sign(\delta)\left(\rho_{-+}+\rho_{+-}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{--}-\rho_{++}\right) = \frac{\partial\theta}{\partial t}\ 2\left(\rho_{+-}+\rho_{-+}\right)$$

und somit $$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega\ sign(\delta) & -2\dot{\theta} \\ \Omega\ sign(\delta) & 0 & 0 \\ 2\dot{\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{F}} \times \vec{\tilde{B}}$$

mit $\vec{\tilde{F}} = (0,-2\dot{\theta},\ \Omega\ sig(\delta))$

Für adiabatische Änderungen von θ ist $\dot{\theta}$ nahezu Null, sodas $\vec{\tilde{F}} \approx (0,0,\ \Omega\ sig(\delta))$. Der Feldvektor zeigt also in z-Richtung. Die Inversion $\tilde{w}$ bleibt somit konstant. Eine interessante Realisation einer adiabatischen Änderung von θ erhält man durch eine Änderung der Verstimmung. Beginnt man mit $\delta \ll 0$ im Grundzustand des ungestörten Systems so zeigt der Blochvektor sowohl in der ungestörten Basis als auch in der Eigenbasis von H zum Südpol. Mit (b) folgt dass der Blochvektor in der Eigenbasis von H am Südpol bleibt obwohl die Verstimmung zu Werten $\delta \gg 0$ verändert wird. In der ungestörten Basis ist das System dabei jedoch invertiert worden. Die Invertierung eines Zwei-Niveau-Systems mit Hilfe eines adiabatischen Transfers ist nahezu unabhängig von der genauen Prozessführung und damit oft viel besser geeignet als ein π-Puls, bei dem man die Pulsdauer und Stärke genau kontrollieren muss.

Weiterführende Literatur zum Thema „adiabatische und nicht-adiabatische Dynamik“

1. Landau/Lifshitz, Quantenmechanics, Kapitel 53.

2. Experimentelle Studie zum adiabatischen Transfer in einem Atomstrahl
Ekstrom et al., OpticsCommunication123, 505 (1996)

3. Zwei Studien zur Dynamik an verhinderten Kreuzungen
J. R. Rubbmark, M. M. Kash, M. G. Littman, and D. Kleppner, Physical Review A 23, 3107 (1981).
K.-A. Suominen, B. Garraway, Phys. Rev. A 45, 374 (1992).