Übungen zur Physik III

Blatt 5 (16 P.)

Aufgabe 16: Wahrscheinlichkeitsstromdichte und Kontinuitätsgleichung

Gegeben sei eine Wellenfunktion $\psi(r,t)$ für welche die Schrödingergleichung

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2\Delta}{2m}\psi(r,t) + V(r)\,\psi(r,t)$ gelte (V(r) reell). Die positiv reelle Größe

$\rho(r,t) \equiv \psi^*(r,t)\,\psi(r,t)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte. Die reell vektorielle Größe

$\vec{j}(r,t) \equiv \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^*(r,t)\,\vec{\nabla}\psi(r,t) - \psi(r,t)\,\vec{\nabla}\psi^*(r,t)\right)$ heißt Wahrscheinlichkeitsstromdichte.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Schrödingergleichung, dass die Kontinuitätsgleichung

$\frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t) + \vec{\nabla}\vec{j}(r,t) = 0$ gilt. (1.5 P.)

(b) Es sei $\psi(r,t) = A(r,t)\,e^{iS(r,t)}$, wobei $A(r,t)$ reell positiv und $S(r,t)$ reell. Zeigen Sie, dass $\vec{j}(r,t) = \rho(r,t)\,\vec{v}(r,t)$, wobei das reell vektorielle Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(r,t)$ wie folgt definiert ist: $\vec{v}(r,t) \equiv \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}S(r,t)$. Überzeugen Sie sich, dass $\vec{v}(r,t)$ tatsächlich die physikalische Einheit Geschwindigkeit besitzt.

(1.5 P.)

(c) Berechnen Sie $A(r,t), \rho(r,t), S(r,t), \vec{v}(r,t), \vec{j}(r,t)$ für das Beispiel einer ebenen Welle $\psi(r,t) = A_0 e^{i(kx-\omega t)}$, A_0 reell.

(1 P.)

Aufgabe 17: Potentialkasten

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem würfelförmigen Potentialkasten (i.e., ein Potentialtopf mit "unendlich hohen Wänden") der Kantenlänge d. Geben Sie für die möglichen Zustände jeweils die Quantenzahlen, den Energiewert E und den Ortsanteil der Wellenfunktion $\psi(x_1, x_2, x_3)$ an. Bestimmen Sie Energie und Entartungsgrad für die 5 Energieniveaus mit den kleinsten Energien. (Entartungsgrad = Zahl der Zustände mit gleicher Energie).

(2 P.)

b) Ein Elektron sei auf das Volumen eines Atomkerns ($d = 10^{-14}$ m) beschränkt. Schätzen Sie die Nullpunktsenergie E_{min} des Elektrons mit dem Ergebnis von (a) ab. Vergleichen Sie E_{min} mit der Coulomb-Energie eines Elektron-Proton-Paares im Abstand d/2. Kann das Elektron Bestandteil des Atomkerns sein? (1 P.)

c) Ein Atomkern kann vereinfacht als Potentialtopf der Tiefe $V_0 \approx 50$ MeV betrachtet werden. Kann das Neutron Bestandteil des Atomkerns sein?

(1 P.)

Aufgabe 18: Potentialbarriere

Eine ebene Materiewelle der Wellenzahl k_0 und Energie ε treffe auf eine Barriere der Höhe V und der Dicke d. Berechnen Sie den Amplitudentransmissionskoeffizient t sowie den Transmissionskoeffizienten der Wahrscheinlichkeitsdichte T in Abhängigkeit von d und k_0 für die Fälle : $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to V$ und $\varepsilon \to \infty$.

(2 P.)

Aufgabe 19: Potentialtopf

a) Berechnen Sie für einen eindimensionalen, rechteckigen Potentialtopf der Breite d = 0,5 nm und der Tiefe V_0 = 25 eV die Anzahl der gebundenen Zustände für Elektronen und für Protonen. (Hinweis: Betrachten Sie denselben Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden und schließen Sie mit Hilfe dieser Betrachtung auf den Endlichen.)

(1 P.)

b) Ein Elektron ist in einem dreidimensionalen würfelförmigen Potentialtopf (Kantenlänge d = 5 nm) der Tiefe V_0 = 2 eV eingesperrt. Schätzen Sie die Anzahl der gebundenen Zustände ab.

(1 P.)

Aufgabe 20: Tunneleffekt

Die Energie der Sonne wird durch Fusionsreaktionen (Kernverschmelzung) gewonnen, wobei Masse in Energie umgewandelt wird. Einer der wesentlichen Prozesse ist die Verschmelzung zweier Protonen. Dabei muss ein Proton durch den Coulombwall des anderen hindurch tunneln. Der Radius des Protons ist $R = 1{,}2 \cdot 10^{-15}$ m. Berechnen Sie die potentielle Energie V_R des Protons am Rand des anderen Protons. Die mittlere Energie der Protonen ist 3/2 k_BT, die Sonnentemperatur werde zu 10^7 K angenommen. Wir betrachten willkürlich Protonen einer Energie von 10 k_BT (höhere Energien sind sehr unwahrscheinlich). Wie groß ist diese im Vergleich zur „Coulombbarriere“ V_R? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Protonen eine kastenförmige eindimensionale Potentialbarriere der Höhe V_R und der Breite R durchdringen.

(4 P.)