Eindimensionaler mechanischer harmonischer Oszillator

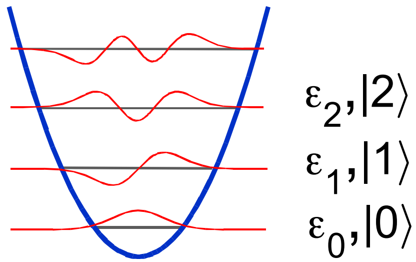
$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 X^2, \quad \omega = \text{Schwingungsfrequenz im Potential } V(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

Definiere einheitenlose Operatoren: $a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\,\xi} X + i \frac{\xi}{\sqrt{2}\,\hbar} P, \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$N \equiv a^+ a$$

Eigenschaften von a bzw. N :

1) $a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\,\xi} X - i \frac{\xi}{\sqrt{2}\,\hbar} P$ adjungierter Operator



2) $X = \frac{\xi}{\sqrt{2}} (a^+ + a) \qquad P = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}\,\xi} (a^+ - a)$

3) $[a, a^+] = 1$

4) $N^+ = N, \; N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$ zählt die Anzahl angeregter Oszillator-Quanten

5) $H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right)$

6) $a^+ |n\rangle = (n+1)^{1/2} \; |n\rangle$ erzeugt ein Oszillator-Quant

$a \; |n\rangle = n^{1/2} \; |n\rangle$ vernichtet ein Oszillator-Quant

 Universität Hamburg

Quasi-klassische Zustände beim mechanischen harmonischen Oszillator:

Die Zustände scharfer Energie $|n\rangle$ sind über das gesamte Potential verschmiert und haben wenig Ähnlichkeit mit den vertrauten Zuständen des klassischen Oszillators

Im Zustand ψ_n gilt:

$$\langle X \rangle_n = \langle n|\, X\, |n\rangle = 0 \qquad \Delta_n X = \xi \sqrt{n + 1/2}$$

$$\langle P \rangle_n = \langle n|\, P\, |n\rangle = 0 \qquad \Delta_n P = \frac{\hbar}{\xi} \sqrt{n + 1/2}$$

$$\Delta_n X\, \Delta_n P = (n + 1/2)\, \hbar$$

$\rightarrow$ nur für n = 0 minimales Unschärfe-Produkt

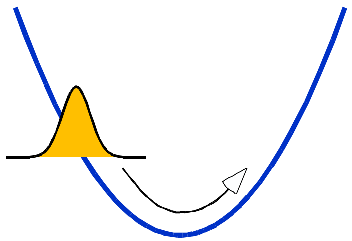
Frage: was sind die maximal klassischen Zustände, welche die Quantenmechanik zuläßt?

Von solchen quasi-klassischen Zuständen erwartet man

minimale Unschärfe: $\Delta X\, \Delta P = \hbar/2$

oszillierende Erwartungswerte: $\langle X \rangle \propto \cos(\omega t - \theta)$

$$\langle P \rangle = m \frac{\partial}{\partial t} \langle X \rangle$$



Definiere “quasi-klassische” Zustände: $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}: \quad |\alpha\rangle \equiv \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

Zeitentwicklung: $|\alpha(t)\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\, e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

BEW: $|\alpha(t)\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n(t)\rangle$ mit $|n(t)\rangle = |n\rangle \exp(-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar} t) = |n\rangle\, e^{-in\omega t} e^{-i\omega t/2}$

$|\alpha(t)\rangle$ ist Eigenzustand des Vernichtungsoperators a zum Eigenwert $\alpha(t) = \alpha\, e^{-i\omega t}$:

BEW: $a\,|\alpha(t)\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}}\, a\,|n\rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, |n-1\rangle$

$$= \alpha(t)\ \exp(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(t)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \alpha(t)\, |\alpha(t)\rangle$$

Die quasi-klassischen Zustände sind fast orthonormal: $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$

Wahrscheinlichkeit im Zustand $\phi_\alpha(t)$ genau n Oszillator-Quanten zu finden:

$$\langle m|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha\, e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \langle m|n\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2 + i\omega t}{2}\right) \frac{(\alpha\, e^{-i\omega t})^m}{\sqrt{m!}}$$

$$P_\alpha(n) \equiv |\langle\alpha(t)|n\rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2)\,\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad \rightarrow$$ Poisson Verteilung

Mittlere Anzahl von Oszillator-Quanten im Zustand $\phi_\alpha(t)$: $\langle N\rangle_\alpha = |\alpha|^2$

$$\langle N\rangle_\alpha = \langle\alpha(t)|\, N\, |\alpha(t)\rangle = \langle\alpha(t)|\, a^+ a\, |\alpha(t)\rangle = |\, a|\alpha(t)\rangle\, |^2 = |\alpha(t)|^2 = |\alpha|^2$$

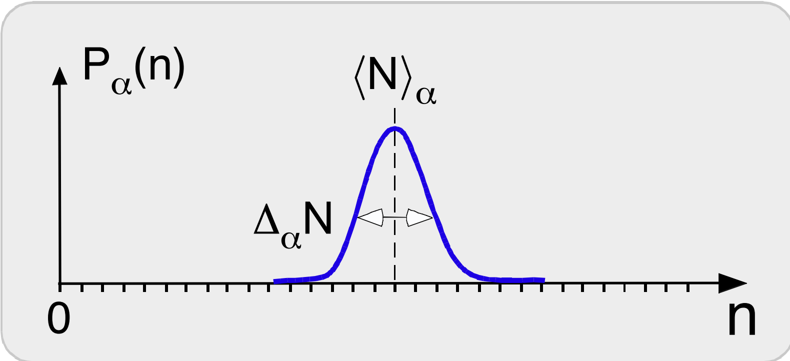
Unschärfe der Anzahl von Oszillator-Quanten im Zustand $|\alpha(t)\rangle$: $\Delta_\alpha N = \sqrt{\langle N\rangle_\alpha}$

$$N^2 = a^+ a\, a^+ a = a^+ a + a^+ a^+ a\, a$$

$$\langle N^2\rangle_\alpha = \langle\alpha(t)|\, N^2 |\alpha(t)\rangle = |\, a|\alpha(t)\rangle|^2 + |\, a^2|\alpha(t)\rangle|^2 = |\alpha|^2 + |\alpha|^4$$

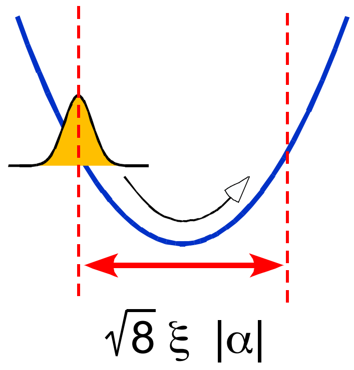
$$\langle N\rangle_\alpha^{\,2} = |\alpha|^4$$

$$\Delta_\alpha N = \sqrt{\langle N^2\rangle_\alpha - \langle N\rangle_\alpha^{\,2}} = |\alpha| = \sqrt{\langle N\rangle_\alpha}$$



 Universität Hamburg

Erwartungswerte und Varianzen von X und P im Zustand $|\alpha(t)\rangle$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$:



a. $\langle X\rangle_\alpha = \sqrt{2}\,\xi\,|\alpha|\,\cos(\omega t - \theta)$ Schwingung mit

b. $\langle P\rangle_\alpha = m\,\frac{\partial}{\partial t}\langle X\rangle_\alpha$

c. $\Delta_\alpha X = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\,,\ \Delta_\alpha P = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\,\xi}$ hängt nicht von Amplitude α ab

d. $\Delta_\alpha X\,\Delta_\alpha P = \hbar/2 \quad \rightarrow$ minimales Unschärfe-Produkt

BEW:

a. $$\langle X\rangle_\alpha = \langle\alpha(t)|\,X\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\langle\alpha(t)|\,a^+ + a\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\Big(\alpha^*(t) + \alpha(t)\Big) = \frac{\xi}{\sqrt{2}}\Big(\alpha^* e^{i\omega t} + \alpha\, e^{-i\omega t}\Big)$$

$$= \sqrt{2}\,\xi\,|\alpha|\,\cos(\omega t - \theta) \quad \text{mit} \quad \alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

c. $$\langle X^2\rangle_\alpha = (\xi^2/2)\,\langle a^+a^+ + a\,a + a\,a^+ + a^+\,a\rangle_\alpha = (\xi^2/2)\,\langle\alpha(t)|\,a^+a^+ + a\,a + 2\,a^+a + 1\,|\,\alpha(t)\rangle$$

$$= (\xi^2/2)\,(\alpha^*(t)^2 + \alpha(t)^2 + 2|\alpha|^2 + 1)$$

$$\langle X\rangle_\alpha^{\,2} \underset{\text{a.}}{=} (\xi^2/2)\,(\alpha^*(t)^2 + \alpha(t)^2 + 2|\alpha|^2\,) \quad \rightarrow \quad \Delta_\alpha X^2 = \langle X^2\rangle_\alpha - \langle X\rangle_\alpha^{\,2} = (\xi^2/2)$$

BSP: Monochromatisches Lichtfeld als harmonischer Oszillator

Klassisches monochromatisches Lichtfeld: $E(x,t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\,\left[\,\hat{\varepsilon}(x)\,\alpha(t) - \hat{\varepsilon}(x)^*\,\alpha^*(t)\,\right]$

Amplitude: $\alpha(t) = \alpha(0)\,e^{-i\omega t}$ ist harmonischer Oszillator

$\hat{\varepsilon}(x)$ = räumliche Struktur bzw. Polarisation der Feldverteilung: $1 = \int \hat{\varepsilon}(x)\,\hat{\varepsilon}^*(x)\;d^3x$

(Bsp: ebene Welle $\hat{\varepsilon}_0\,e^{ikx}$ mit konstanter Polarisation $\hat{\varepsilon}_0$)

Maxwell-Gleichung: $\frac{\partial}{\partial t}E(x,t) = c^2\,\nabla\times B(x,t)\,,\quad \frac{\partial}{\partial t}B(x,t) = -\,\nabla\times E(x,t)\,,\quad 0 = \nabla E(x,t) = \nabla B(x,t)$

$$\rightarrow \quad \left[\Delta + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\hat{\varepsilon}(x) = 0$$

$$B(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}}\,\left[\,\nabla\times\hat{\varepsilon}(x)\,\alpha(t) + \nabla\times\hat{\varepsilon}(x)^*\,\alpha^*(t)\,\right]$$

Energie: $H = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E(x,t)^2\;d^3x + \frac{1}{2\mu_0}\int B(x,t)^2\;d^3x = \hbar\omega\,\alpha(t)^*\,\alpha(t)$

Quantisierung: $\mathbf{H} = \hbar\omega\ \alpha^* \alpha = \hbar\omega\ \frac{1}{2}\{\alpha^* \alpha + \alpha\, \alpha^*\}$

$$\alpha \rightarrow a\,,\quad \alpha^* \rightarrow a^+\,,\quad [a, a^+] = 1$$

Hamilton-Operator: $\mathbf{H} = \hbar\omega\ (a^+ a + \tfrac{1}{2})$

Zähl-Operator: $\mathbf{N} = a^+ a$ zählt die in der Mode $\hat{\varepsilon}(x)$ vorhandenen Photonen

E-Feld-Operator: $\mathbf{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\left[\ \hat{\varepsilon}(x)\, a - \hat{\varepsilon}^*(x)\, a^+\right]$

$$P = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}\,\xi}(a^+ - a)$$

beim mechanischen Oszillator

Fock-Zustände (Eigenzustände von H):

Man bezeichnet den Grundzustand durch $\mathbf{N}\,|0\rangle = 0$

$$|n\rangle \equiv \frac{a^{+\,n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle \quad\Rightarrow\quad a\,|n\rangle = n^{1/2}\,|n-1\rangle,\ \ a^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}\,|n+1\rangle$$

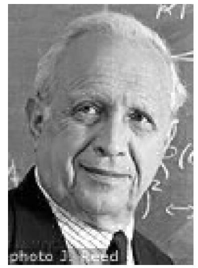
$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}\,,\qquad \mathbf{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

E-Feld-Operator: $\langle n|\mathbf{E}|n\rangle = 0$ $\rightarrow$ kein mittleres elektrisches Feld im Fock-Zustand

$$\Delta_n E^2 = \langle n|\mathbf{E}^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\ \hat{\varepsilon}(x)\,\hat{\varepsilon}^*(x)\ \ (2n+1) \neq 0$$ sogar für $n = 0$!

($\langle 0|E^2|0\rangle \neq 0$ $\rightarrow$ Vakuum-Fluktuationen)

Kohärente Zustände (Eigenzustände von a):



Roy Glauber (1962)
Nobelpreis 2005

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{C}: \quad |\alpha\rangle \ \equiv\ \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\ |n\rangle$$

Mittleres elektrisches Feld: $\quad \langle\alpha|\, E\, |\alpha\rangle \ =\ i \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{2\,\varepsilon_0}}\ \left[\ \hat{\varepsilon}(x)\,\alpha\ -\ \hat{\varepsilon}^*(x)\,\alpha^*\ \right]$

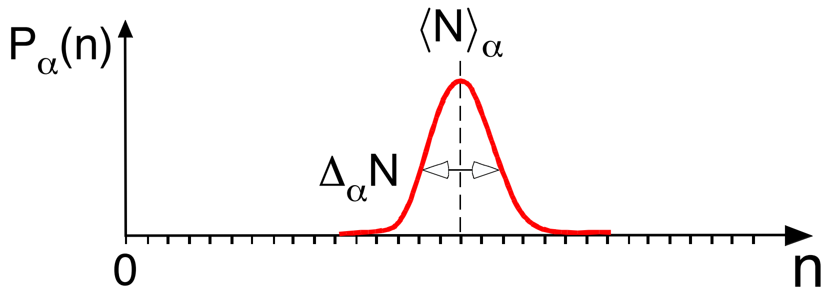
Varianz des elektrischen Felds: $\quad \Delta_\alpha E \ \equiv\ \sqrt{\langle\alpha|\, E^2\, |\alpha\rangle - \langle\alpha|\, E\, |\alpha\rangle^2} \ =\ \sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{2\,\varepsilon_0}}\ \ |\hat{\varepsilon}(x)|$

unabhängig von Feldamplitude α

Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\alpha\rangle$ genau n Photonen zu finden:

$$P_\alpha(n) \ \equiv\ |\langle\alpha|n\rangle|^2 \ =\ \exp(-|\alpha|^2)\ \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$

$\rightarrow$ Poisson Verteilung



Mittlere Photonenzahl im Zustand $|\alpha\rangle$: $\quad \langle N\rangle_\alpha \ =\ \langle\alpha|\, N\, |\alpha\rangle \ =\ |\alpha|^2$

Unschärfe der Photonenzahl im Zustand $|\alpha\rangle$: $\ \Delta_\alpha N^2 \ \equiv\ \langle N^2\rangle_\alpha - \langle N\rangle_\alpha^{\,2} \ =\ |\alpha|^2$

$\Rightarrow \quad \Delta_\alpha N \ =\ \sqrt{\langle N\rangle_\alpha} \ =\ |\alpha| \qquad \rightarrow$ Quantenrauschen des Lasers (Schrotrauschen)