Abgabe: 6.12.2016

Übung 6 zur Vorlesung Physik V

Aufgabe 1: Formfaktoren

Im Journal "Physical Review Letters, Volume 19, Number 9" vom August 1967 wird eine Wirkungsquerschnittsmessung für die Streuung von Elektronen mit $E = 750\,\mathrm{GeV}$ an den Isotopen ^{40}Ca und ^{48}Ca beschrieben.

a) Zeigen Sie durch Integration in Kugelkoordinaten, dass der Formfaktor für eine auf 1 normierte, kugelsymmetrische Ladungsverteilung $f(\vec{r}) = f(r = |\vec{r}|)$ gegeben ist durch:

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty f(r) \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 \, \mathrm{d}r, \qquad \int f(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r = 1$$

Hinweis: $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr\cos\theta$ **2 (C)**

b) In erster Näherung kann ein Kalzium-Kern als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass mit dieser Annahme der Formfaktor gegeben ist durch:

$$F(q) = \frac{3}{x^3} \cdot (\sin x - x\cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{|q|R}{\hbar}$$

2 (B)

c) Bestimmen Sie für den Formfaktor $F(q)$ graphisch, numerisch oder durch Näherung $\lim_{q\to 0} F(q)$ und die ersten drei positiven Nullstellen. **2 (A)**

d) Bestimmen sie aus dem veröffentlichten Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ den Kernradius R_{Ca40} und R_{Ca48}. Identifizieren Sie die drei stark verschmierten lokalen Minima des Streuquerschnitts mit den Nullstellen des Formfaktors einer homogen geladenen Kugel. Berechnen Sie für jedes Isotop den den Mittelwert der Kernradien. Hinweis: Der Streuquerschnitt ist auch in Abbildung 9.4 im Skript dargestellt. **2 (B)**

Aufgabe 2: Synchrotronstrahlung

In einem Teilchenbeschleuniger erfahren geladene Teilchen sehr hohe Beschleunigungen. Die dabei abgegebene Strahlungsleistung P_S des Teilchens der Ladung q, Masse m, Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ ($|\beta| \approx 1$) ist gegeben durch:

$$P_S = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2\gamma^6}{6\pi\epsilon_0 c} \left[\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 - \left(\vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right].$$

a) In einer geraden Beschleuniger-Kavität mit elektrischem Feld ξ erfährt ein Teilchen die Beschleunigung $\dot{\beta} = q\xi m^{-1}\gamma^{-4}$. Zeigen Sie, dass die abgestrahlte Energie P_S in einer geraden Beschleuniger-Kavität proportional zu $(m/E)^2\xi^2$ ist. **1 (A)**

b) Zeigen Sie, dass P_S für die Kreisbahn mit Radius R proportional zu $(E/m)^4 R^{-2}$ ist. Was folgt daraus für das Verhältnis der von einem Proton resp. Elektron abgestrahlten Leistung unter ansonsten gleichen Bedingungen? **2 (B)**

c) Ein Speicherring besteht aus geraden Segmenten und Kreisabschnitten mit Radius R. Am HERA Beschleuniger wurden Elektronen mit einer Energie von $E = 27{,}5\,\mathrm{GeV}$ mit Protonen zur Kollision gebracht. Bestimmen Sie näherungsweise, wieviel Prozent Energie die Elektronen durch Synchrotronstrahlung auf einem Meter Kreisabschnitt verlieren. **2 (B)**

d) Der Gesamtumfang des Beschleunigerrings HERA beträgt 6.3 km; allerdings beträgt der Ablenkradius R der Magneten nur 600 m. Bestimmen Sie den pro Umlauf entstehenden Energieverlust $\Delta E = P_S \cdot \Delta t$ durch Synchrotronstrahlung. **1 (B)**

Aufgabe 3: Breit-Wigner-Resonanz

Das Υ ist ein gebundener $b\bar{b}$ Zustand mit Spin $J = 1$ und lässt sich z.B. in e^+e^--Speicherringen bei entsprechend gewählter Strahlenergie direkt erzeugen. Für den resonanten Wirkungsquerschnitt eines Prozesses vom Anfangszustand (in) in einen Endzustand (out) gilt die relativistische Breit-Wigner-Formel:

$$\sigma(E) = 12\pi(\hbar c)^2 \mathcal{BR}_{\mathrm{in}} \frac{\Gamma_{\mathrm{tot}}^2}{(E^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma_{\mathrm{tot}}^2} \mathcal{BR}_{\mathrm{out}}, \qquad \mathcal{BR}_{\mathrm{part}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{part}}}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}$$

Dabei is E die Schwerpunktsenergie, m die Υ-Masse, Γ_{tot} die totale Breite, $\mathcal{BR}_{\mathrm{in/out}}$ das Verzweiungsverhältnis (für Produktion und Zerfall) und Γ_f die partielle Breite für den Endzustand f.

Wir nehmen im Folgenden an, dass die beiden einlaufenden Teilchen Elektronen sind ($\mathcal{BR}_{\mathrm{in}} = \Gamma_{ee}/\Gamma_{\mathrm{tot}}$). Für die Υ-Resonanz ist die totale Breite $\Gamma_{\mathrm{tot}} = \Gamma_{had.} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{\tau\tau}$ kleiner als die experimentelle Auflösung. Die totale und die partiellen Breiten lassen sich trotzdem bestimmen, indem man die gemessenen Wirkungsquerschnitte über den Resonanzbereich integriert: $\Sigma_f = \int \sigma_f dE$

a) Zeigen Sie, dass in der Nähe der Resonanz ($E \approx m$) die aus der Vorlesung bekannte nicht-relativistische Breit-Wigner-Formel gilt:

$$\sigma(E) = \frac{3\pi}{m^2}(\hbar c)^2 \mathcal{BR}_{\mathrm{in}} \frac{\Gamma_{\mathrm{tot}}^2}{(E - m)^2 + \Gamma_{\mathrm{tot}}^2/4} \mathcal{BR}_{\mathrm{out}}$$

2 (A)

b) Bestimmen Sie Σ_{f}, Σ_{ee} und $\Sigma_{\mathrm{tot}} = \Sigma_{had} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{\mu\mu} + \Sigma_{\tau\tau}$. **2 (B)**

c) Drücken Sie die Γ_{ee}, Γ_{tot} und Γ_{f} als Funktion der integrierten Wirkungsquerschnitte Σ aus. **2 (A)**