6 Zweiteilchen Systeme

6.1 Schwerpunktsystem und Relativkoordinaten

Häufig treten in der Physik Systeme auf, die man in sehr guter Näherung als Systeme aus zwei punktförmigen Teilchen betrachten kann. Beispiele hierfür sind

- Zwei Massen, die über eine Feder miteinander verbunden sind,
- Erde und Mond, die über Gravitation miteinander wechselwirken,
- Elektron und Proton, die im Wasserstoff gebunden sind,
- Moleküle wie H_2 oder O_2.

Für die Wechselwirkung zwischen den beiden Massen m_1 und m_2 gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{6.1}$$

Zusätzlich kann es aber auch äußere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ geben, die nicht von der jeweils anderen Masse stammen. Die Bewegungsgleichungen sind demnach

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= +\vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}_{12} + \vec{F}_2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dies sind also zwei gekoppelte Differentialgleichungen, denn die Kraft auf die eine Masse hängt von der Bewegung der jeweils anderen Masse ab.

In der Regel handelt es sich bei $\vec{F}_{12}$ um eine *Zentralkraft*, so dass

$$\vec{F}_{12} = \pm|\vec{F}_{12}| \cdot \vec{r}_{12} \tag{6.3}$$

mit der Relativkoordinate

$$\boxed{\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2} \tag{6.4}$$

In diesem Fall löst man die Bewegungsgleichung am besten durch Einführung der Schwerpunktskoordinate

$$\boxed{\vec{R}_S = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}} \tag{6.5}$$

$\vec{R}_S$ ist also ein Ortsvector, der immer zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ liegt, und zwar immer näher bei der größeren Masse. Für $m_1 = m_2$ ist $\vec{R}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Man kann somit nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R}_S + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_S - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind

$$\vec{v}_{12} = \dot{\vec{r}}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \vec{V}_S = \dot{\vec{R}}_S = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.7}$$

Wir definieren nun die Gesamtmasse und die reduzierte Masse

$$\boxed{M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}} \tag{6.8}$$

Bei gleichen Massen $m_1 = m_2$ ist $\mu = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$. Sind die Massen dagegen sehr unterschiedlich, so ist die reduzierte Masse μ etwas kleiner als die kleinere der beiden Massen. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall konstanter Massen.

Diese Koordinaten haben große Vorteile.

Gesamtimpuls Wegen $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ ist der Gesamtimpuls einfach das Produkt aus Gesamtmasse und Geschwindigkeit des Schwerpunkts,

Impuls des Schwerpunkts

$$\boxed{\vec{P} = M \cdot \vec{V}_S} \tag{6.9}$$

Addiert man die Bewegungsgleichungen 6.2, so ist

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{6.10}$$

Die inneren Kräfte $\vec{F}_{12}$ ändern daher den Gesamtimpuls nicht,

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \sum_{i=\text{äußere}} \vec{F}_i} \tag{6.11}$$

Gesamte kinetische Energie Wegen

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_S + \frac{m_2}{M}\vec{v}_{12})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{V}_S - \frac{m_1}{M}\vec{v}_{12})^2 \\ &= \frac{1}{2}M\,\vec{V}_S^2 + \frac{1}{2}(\frac{m_1m_2^2}{M^2} + \frac{m_1^2m_2}{M^2})\,\vec{v}_{12}^2 \end{aligned} \tag{6.12}$$

folgt

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}\,M\,\vec{V}_S^2 + \frac{1}{2}\,\mu\,\vec{v}_{12}^2} \tag{6.13}$$

Dies ist also einfach die Summe aus einer Energie für den Schwerpunkt und einer für ein *Teilchen* mit reduzierter Masse, bei dem nur die Relativgeschwindigkeit zählt. Für das System Sonne-Erde wäre wegen $m_{Sonne} \gg m_{Erde}$ der erste Term im wesentlichen derjenige der Sonne, und der zweite Terme fast derjenige der Erde.

Gesamter Drehimpuls Bezüglich des Ursprungs des Koordinatensystems ist der gesamte Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ &= m_1(\vec{R}_S + \frac{m_2}{M}\vec{r}_{12}) \times (\vec{V}_S + \frac{m_2}{M}\vec{v}_{12}) + m_2(\vec{R}_S - \frac{m_1}{M}\vec{r}_{12}) \times (\vec{V}_S - \frac{m_1}{M}\vec{v}_{12}) \end{aligned} \tag{6.14}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\boxed{\vec{L} = M\,\vec{R}_S \times \vec{V}_S \,+\, \mu\,\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}} \tag{6.15}$$

Der erste Term ist der Drehimpuls des Schwerpunkts bezüglich des Ursprungs. Der zweite Term beschreibt den relativen Drehimpuls der beiden Massen umeinander, relevant ist dafür die reduzierte Masse.

Drehmoment und Drehimpulserhaltung Bezüglich des Koordinatenursprungs ist das gesamte Drehmoment[6]

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= \vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{12} + \vec{F}_1) + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{12} + \vec{F}_2) \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} \,+\, \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \,+\, \vec{r}_2 \times \vec{F}_2\end{aligned} \tag{6.16}$$

Da für Zentralkräfte der erste Summand Null ist, folgt

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} \;=\; \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \,+\, \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \;=\; \sum_{i,\text{äußere}} \vec{\mathcal{M}}_i} \tag{6.17}$$

Da außerdem

$$\dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2 = \vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2 \tag{6.18}$$

ist, folgt auch

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{\mathcal{M}} \;=\; \sum_{i,\text{äußere}} \vec{\mathcal{M}}_i} \tag{6.19}$$

Ohne äußere Drehmomente gilt also, dass der Gesamtdrehimpuls erhalten ist.

Insbesondere ist für abgeschlossene Zweikörperprobleme, d.h. ohne äußere Kräfte, der gesamte Impuls erhalten und der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Außerdem ist der gesamte Drehimpuls erhalten.

[6] Vorsicht! $\vec{\mathcal{M}}$ ist hier ein Drehmoment, M aber die gesamte Masse.