Wir definieren nun die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ als einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene der Kreisbeweg steht (parallel zur Drehachse) und dessen Betrag gerade die Rate ist, mit der sich der Winkel φ zeitlich ändert,

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \tag{4.112}$$

Die Richtung kann nach der rechten Hand Regel aus dem Drehsinn der Bewegung bestimmt werden. Damit ist (siehe Gl. 4.111)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{4.113}$$

Ist der Ursrung des Koordinatensystems im Zentrum der Kreisbewegung, so sind $\vec{r}$ und $\vec{\omega}$ senkrecht zueinander, so dass einfach

$$v = \omega \cdot |\vec{r}| \tag{4.114}$$

Die entsprechende Beschleunigung ist

$$\vec{a}(t) = \ddot{\varphi}\, |\vec{r}| \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}^2\, |\vec{r}| \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

oder

$$\vec{a} = \dot{\omega}\, |\vec{r}|\, \vec{e}_v - \omega^2 \cdot \vec{r} \tag{4.116}$$

Der erste Term ist parallel zu $\vec{v}$ und erhöht die Winkelgeschwindigkeit. Der zweite Term zeigt immer von der Bahnkurve zum Zentrum der Bahn. Der Betrag dieses Teils der Beschleunigung ist

$$a = \omega^2 \cdot |\vec{r}| \tag{4.117}$$

Um also einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, ist eine nach innen gerichtete Kraft

Zentripetalkraft einer Kreisbahn

$$\boxed{F = m \cdot \omega^2 \cdot |\vec{r}|} \tag{4.118}$$

notwendig, die Zentripetalkraft genannt wird. Auch die kinetische Energie der Masse auf der Kreisbahn, die Rotationsenergie, hängt von der Winkelgeschwindigkeit ab,

$$E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2 \tag{4.119}$$

Mit dem Trägheitsmoment I lässt sich dies schreiben als

Trägheitsmoment I
Rotationsenergie E_{rot}

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} I\, \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad I = m\, r^2} \tag{4.120}$$

Auch hier ist $|\vec{r}|$ der Abstand zur Drehachse.

4.11 Drehimpuls und Drehmoment

Drehimpuls $\vec{L}$
$[\vec{L}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

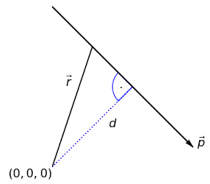

Abb. 4.16
Stoßparameter d

Wir definieren allgemein den Drehimpuls eines Massenpunktes relativ zum Ursprung des Koordinatensystems,

$$\boxed{\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}} \tag{4.121}$$

Hier ist $\vec{r}$ wie immer der Abstand des Massenpunkts vom Koordinatenursprung. Der Drehimpuls $\vec{L}$ hängt damit - anders als Impuls oder Energie - von der Wahl des Koordinatenursprungs ab[5]. Wegen des Kreuzprodukts steht $\vec{L}$ senkrecht auf der Ebene, die von $\vec{r}$ und $\vec{p}$ aufgespannt wird. Für eine geradlinig gleichförmige Bewegung ist der Drehimpuls gerade das Produkt von Impuls p und Stoßparameter d, wobei der Stoßparameter der minimale Abstand der Bahnkurve vom Ursprung ist.

Beispiel Kreisbewegung: Wählt man den Ursprung des Koodinatensystems in der Mitte der Kreisbahn, so ist

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega \tag{4.123}$$

Trägheitsmoment I
$[I] = \mathrm{kgm}^2$

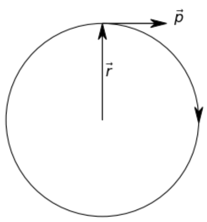

Abb. 4.17
Kreisbewegung mit Radius $\vec{r}$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Man bezeichnet nun allgemein als Trägheitsmoment

$$\boxed{I = m\,r^2} \tag{4.124}$$

so dass

$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}} \tag{4.125}$$

Drehmoment: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses muss mit Kräften zusammen hängen. Es ist (bei m = konstant)

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \tag{4.126}$$

oder Wir definieren daher das Drehmoment, bezüglich des Koordinatenursprungs als

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{4.127}$$

Drehmoment $\vec{M}$
$[\vec{M}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

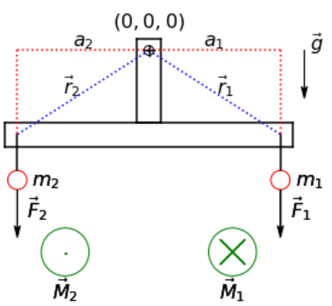

Abb. 4.18
Drehmomente bei einer Waage.

so dass

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} \tag{4.128}$$

Eine äußeres Drehmoment erzeugt daher eine Änderung des Drehimpulses.

Beispiel Waage: Bei einer Waage mit zwei Gewichten m_1, m_2 wie in Abb. 4.18 sind die beiden dazugehörigen Drehmomente

[5] Bezüglich eines anderen Punktes $\vec{x}_0$ wäre

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad &\Rightarrow \quad M_1 = a_1 \cdot F_1 \\ \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad &\Rightarrow \quad M_2 = a_2 \cdot F_2 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Ist die Waage für einen Moment im Gleichgewicht und bleibt sie so, dann gilt das Hebelgesetz

$$\dot{\vec{L}} = 0 = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{4.130}$$

oder

$$\boxed{a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2} \tag{4.131}$$

Allgemein definieren wir daher das Gleichgewicht eines Systems als

$$\boxed{\text{Gleichgewicht:} \qquad \sum \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M} = 0} \tag{4.132}$$

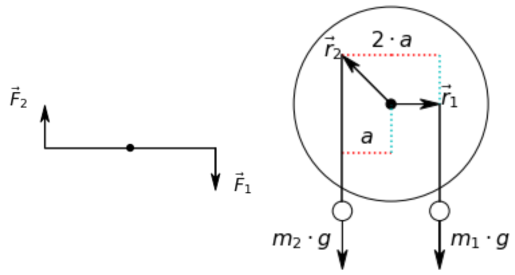

Abb. 4.19 Links: Beispiel für ein Kräftegleichgewicht, aber kein Drehmomentgleichgewicht, Rechts: Drehscheibe mit Gewichten und Drehmomenten.

Drehimpulserhaltung: Es gibt verschiedene Situationen, in denen der Drehimpuls eines Systems erhalten ist.

- Ohne äußere Drehmomente folgt sofort, dass der Drehimpuls erhalten ist,

$$\vec{M} = 0 = \dot{\vec{L}} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant} \tag{4.133}$$

- Bei einer Zentralkraft wie der Gravitation kann man den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum legen. Dann gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_R \tag{4.134}$$

  Dann ist aber offenbar das Drehmoment bezüglich des Zentrums durch die Zentralkraft gerade Null,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = F \cdot \vec{r} \times \vec{e}_R = 0 \tag{4.135}$$

  Damit ist also, obwohl eine Zentralkraft wirkt, der Drehimuls bezuglich des Zentrums erhalten,

$$\boxed{\vec{L} = \text{konstant bezüglich Zentrum einer Zentralkraft}} \tag{4.136}$$

5 Scheinkräfte

Im Alltag kennen wir viele Phänomene, die sich durch Trägheitskräfte, Fliehkräfte und Corioliskräfte erklären lassen. Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Kräfte Scheinkräfte sind, die in Inertialsystemen nicht auftreten, sondern nur in beschleunigten oder rotierenden Bezugssystemen.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den nicht-relativistischen Fall. Insbesondere heißt das, dass die Zeit in den betrachteten Bezugssysteme die gleiche ist und die Massen ebenfalls,

$$t' = t \qquad\qquad m' = m \tag{5.1}$$

5.1 Transformationen zwischen Bezugssystemen

Wir betrachten ein Inertialsystem S, in dem ein Beobachter Bahnkurven $\vec{r}(t)$ durch Koordinaten in einem Bezugssystem mit zeitlich konstanten Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ messen kann.

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \sum r_i \vec{e}_i \tag{5.2}$$

Da die Einheitsvektoren zeitlich konstant sind, $\dot{\vec{e}}_i = 0$, gilt für die Zeitableitungen einfach

$$\vec{r} = \sum r_i \, \vec{e}_i \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum \dot{r}_i \, \vec{e}_i \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum \dot{v}_i \, \vec{e}_i \tag{5.3}$$

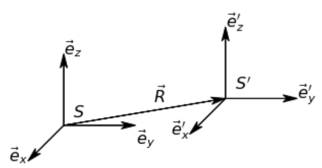

Abb. 5.1 Zur Koordinatentransformation.

Was passiert nun, wenn in einem anderen Bezugssystem S' ein Beobachter die gleiche Teilchenbewegung misst? Wir definieren nun die Messung in jedem beliebigen Koordinatensystem so, dass die Form der Geichungen 5.3 unverändert sein sollen, also

$$\vec{r}' = \sum r'_i \, \vec{e}'_i \qquad \vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \sum \dot{r}'_i \, \vec{e}'_i \qquad \vec{a}' = \dot{\vec{v}}' = \sum \dot{v}'_i \, \vec{e}'_i \tag{5.4}$$

Der Beobachter S' nimmt also an, dass seine Einheitsvektoren zeitlich konstant sind.

5.2 Galilei-Transformationen

Wir haben in Abschnitt 4.1.1 Inertialsysteme so definiert, dass in ihnen Newton's Axiome gelten und dass sie sich gleichförmig geradlinig zueinander bewegen.

Nehmen wir allgemein an, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen $\vec{V}$ ist. Dann kann man das Koordinatensystem in S' immer so wählen, dass die Axen parallel zueinander sind und die Ursprünge der Koordinatensysteme zur Zeit $t = t' = 0$ an der gleichen Stelle sind. Dann gilt für die Bahnkurve $\vec{r}$ in System S und die Bahnkurve $\vec{r}'$ in System S'

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t \tag{5.5}$$

Für die daraus folgenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \qquad\qquad \vec{a}' = \vec{a} \tag{5.6}$$

Für $m' = m$ folgt

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m'\,\vec{a}' = \vec{F}' \tag{5.7}$$

Es gelten also in beiden Systemen Newtons's Axiome. Inertialsysteme sind also durch Galilei-Transformationen der Form Gl. 5.5 verbunden.

5.3 Geradlinig beschleunigte Bezugssysteme

In einem Fahrstuhl, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gilt $\vec{F} = m\vec{g}$. Eine Feder, an der eine Masse m hängt, befindet sich dann in Ruhelage. Wir der Fahrstuhl nun nach oben beschleunigt wird, so beobachtet man, dass sich die Feder verlängert. Fällt der Fahrstuhl ungebremst nach unten, so wird die Feder so kurz, als ob keine Masse daran hängen würde.

Wird allgemein ein System S' relativ zum System S beschleunigt mit der Beschleunigung $\vec{A}$ = konstant (gemessen in S),

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}\,t - \frac{1}{2}\vec{A}\,t^2 \tag{5.8}$$

dann ist

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} - \vec{A}\,t \qquad\qquad \vec{a}' = \vec{a} - A \tag{5.9}$$

und

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\,\vec{A} = \vec{F} - m\,\vec{A} \tag{5.10}$$

Ist S ein Inertialsystem in dem Newton's Axiome gelten, dann ist S' das offenbar nicht, denn es tritt eine zusätzliche Kraft auf. Diese Trägheitskraft ist eine Scheinkraft, die in beschleunigten Systemen eingeführt werden muß, damit $\vec{F}' = m\vec{a}'$ gilt.

5.4 Rotierende Bezugssysteme

In einem rotierendnen Bezugssystem S' sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_i'$ nicht konstant, sondern rotieren mit der Zeit. Ihre zeitliche Änderung ist also (siehe Gl. 4.113)

$$\dot{\vec{e}}_i' = \vec{\omega} \times \vec{e}_i' \tag{5.11}$$

Gegeben sei eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ im Inertialsystem S. Die entsprechende Bahnkurve gemessen in einem rotierenden Koordinatensystem S' sei $\vec{r}'(t)$ mit

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \tag{5.12}$$

Da die Einheitsvektoren in S' zeitabhängig sind folgt für die Geschwindigkeiten in beiden Systemen

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{5.13}$$

Nochmaliges Ableiten nach der Zeit ergibt die Beschleunigungen

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \tag{5.14}$$

Im rotierenden System S' ist daher die beobachtete Kraft

$$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} \underbrace{-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}} \tag{5.15}$$

Die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte, die nur aufgrund der Rotation in S' gemessen werden.

Die Zentrifugalkraft hängt nur vom Ort $\vec{r}'$ ab, der im rotierenden System gemessen wird und steigt quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit. Sie hängt eng mit der Zentripetalkraft (Gl. 4.118) zusammen, ist aber nur in S' relevant.

Die Corioliskraft hängt von der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ in S' ab, nicht aber vom Ort $\vec{r}'$.

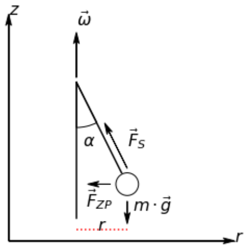

Abb. 5.2 Rotierendes Pendel mit Kräften im Inertialsystem.

Beispiel rotierendes Pendel: Wir betrachten ein Pendel, das in eine gleichmäßige Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ versetzt wird. Dabei wird es gleichzeitig um einen Winkel α ausgelenkt.

Inertialsystem S: Die Masse am Pendel bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r. Damit sie auf dieser Bahn bleibt, muss die Summe aller Kräfte die Zentripetalkraft

$$F_{ZP} = m\omega^2 r \tag{5.16}$$

ergeben. Aus Gewichtskraft und Seilspannung $\vec{F}_S$ folgt

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_S \sin\alpha \\ F_S \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

und damit

$$\frac{F_S \sin\alpha}{F_S \cos\alpha} = \tan\alpha = \omega^2 \frac{r}{g} \tag{5.18}$$

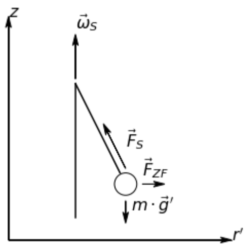

Abb. 5.3 Rotierendes System mit Kräften und Scheinkräften.

Rotierendes System S': Man wählt ein Koordinatensystem, dass genau so schnell rotiert wie das Pendel. Die Masse ruht also in S',

$$\vec{v}' = 0 \qquad \vec{a}' = 0 \tag{5.19}$$

und es muss ein Kräftegleichgewicht herrschen,

$$\sum \vec{F}' = m\vec{a}' = 0 \tag{5.20}$$

Nach Gl. 5.15 ist

$$\vec{F}_{coriolis} = 0 \qquad \vec{F}_{zentrifugal} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = m\omega^2 r \cdot \vec{e}_r \tag{5.21}$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_S \sin\alpha \\ F_S \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.22}$$

Dies ist wieder Gl. 5.17.

Beispiel Wirbelsturm Auf der Nordhalbkugel drehen sich Luftströmungen rechts herum, auf der Südhalbkugel der Erde aber links herum. Die Erklärung ergibt sich aus aus der Corioliskraft.

Für einen beliebigen Standort auf der Erde verwenden wir ein Polarkoordinatensystem $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, dass mit der Erde verbunden mitrotiert. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist parallel zur Achse der Erde,

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{1d} \tag{5.23}$$

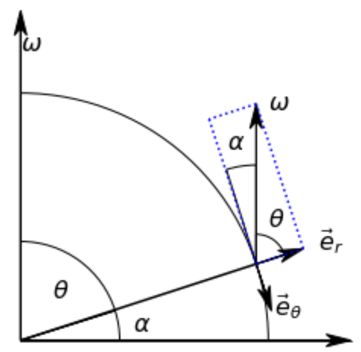

Abb. 5.4 Erde mit Polarkoordinaten und Breitengrad α.

Für einen Wind parallel zur Erde mit Geschwindigkeit $\vec{v}\,'$ zum Beispiel nach Norden ist die Corioliskraft auf jedes Gasatom der Masse m

$$\vec{F}_C' = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' = -2m\omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,m\,\omega\,v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

Für $\cos\theta > 0$ (Nordhalbkugel) zeigt die Kraft in $\vec{e}_\varphi$ Richtung, also nach Osten, für $\cos\theta < 0$ (Südhalbkugel) dagegen nach Westen.

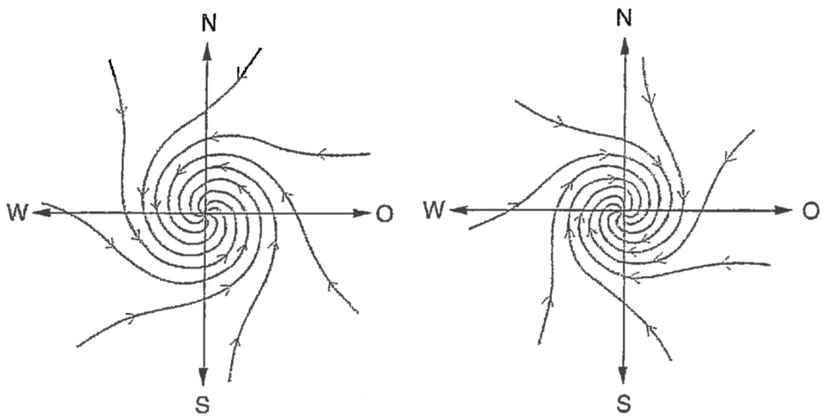

Abb. 5.5 Coriolis-Kraft auf der Nordhalbkugel (links) und Südhalbkugel (rechts).