Weg, so dass man sie ausdrücken kann als Funktion nur des Endpunktes und Anfangspunktes einer Bahnkurve,

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\, d\vec{r} = E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B)} \tag{4.83}$$

Tatsächlich sind durch diese Formel nur Differenzen von potentiellen Energien definiert. Man kann also zu $E_{pot}(\vec{r}_A)$ und $E_{pot}(\vec{r}_B)$ eine Konstante addieren, ohne dass sich etwas an der Gleichung ändert. Anders formuliert ist der Nullpunkt der potentiellen Energie frei wählbar.

Achtung: Reihenfolge beachten!

Beispiel Freier Fall: Wie oben gezeigt ist bei freiem Fall aus der Höhe h die Arbeit, die das Gravitationsfeld an einer Masse m verrichtet, $W = mgh$. Damit ist

$$E_{pot}(h) - E_{pot}(0) = W = mgh \tag{4.84}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(0) = 0 \tag{4.85}$$

so ist die potentielle Energie als Funktion der Höhe

$$E_{pot}(h) = mgh \tag{4.86}$$

Beispiel Feder: Wegen $F = -kx$ ist die potentielle Energie relativ zur Ruhelage

$$E_{pot}(x) - E_{pot}(0) = -\int_x^0 k\, x\, dx = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.87}$$

Mit der Konvention, dass die potenitelle Energie bei $x = 0$ gleich Null ist folgt

$$\boxed{E_{pot}(x) = \frac{1}{2}kx^2} \tag{4.88}$$

Beispiel Gravitation: Die Gravitationskraft auf eine Masse m_1 durch eine Masse m_2 ist eine Zentralkraft,

$$\vec{F} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \tag{4.89}$$

Nähert sich die Masse aus unendlicher Entfernung bis auf einen Abstand r der Masse M, so ist der Weg immer parallel zur Richtung von $\vec{F}$ ist, dann gilt

$$E_{pot}(r = \infty) - E_{pot}(r) = -\int_\infty^r G\frac{m_1\, m_2}{r^2}\, dr = G\frac{m_1\, m_2}{r} \tag{4.90}$$

Definiert man den Nullpunkt der potentiellen Energie jetzt durch

$$\text{Wähle:} \quad E_{pot}(r = \infty) = 0 \tag{4.91}$$

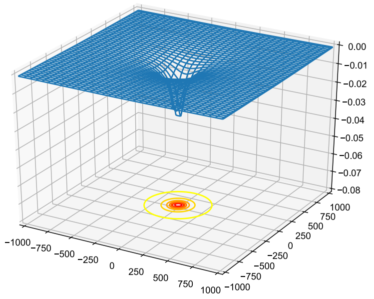

Abb. 4.14
Gravitationspotential.

so folgt

$$\boxed{E_{pot}(r) = -G\,\frac{M\,m}{r}} \tag{4.92}$$

Als Gravitationspotential $V(r)$ der Masse M wird hingegen

$$\boxed{V(r) = -G\,\frac{M}{r}} \tag{4.93}$$

bezeichnet. Dieses Potential ist also unabhängig von der Masse m, auf die Gravitation von M wirkt.

4.9.1 Berechnung der Kraft aus dem potentiellen Energie

Wir haben bereits gesehen, dass Differenzen der potentiellen Energien der Arbeit durch ein Kraftfeld entsprechen. Im 1-dimensionalen Fall ist

$$E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} F_x\,dx \tag{4.94}$$

Für infinitesimal kurze Wege dx ist auch die Differenz der potentiellen Energien infinitesimal klein,

$$dE_{pot} = -F_x\,dx \tag{4.95}$$

und daher kann die Kraft aus der potentiellen Energie berechnet werden durch

$$\boxed{F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}x}} \tag{4.96}$$

Im 3-dimensionalen muss dies auch für die anderen Komponenten der Kraft gelten und die potentielle Energie kann von allen Komponenten von $\vec{r}$ abhängen, $E_{pot}(\vec{r})$, so dass

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla\,E_{pot} := -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial y}E_{pot} \\ \frac{\partial}{\partial z}E_{pot} \end{pmatrix}} \tag{4.97}$$

Die Kraft zeigt damit in Richtung der stärksten Änderung des Potentials.

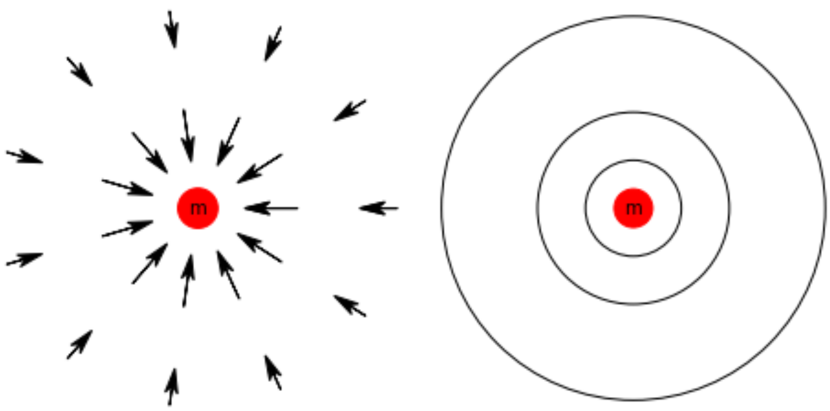

Abb. 4.15 Beispiel einer Zentralkraft (links) und Äquipotentialflächen dazu (rechts).

Beispiel Gravitation Verwendet man

$$\nabla\frac{1}{r} = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} \tag{4.98}$$

so erhält man für die Gravitation aus der potentiellen Energie in Gl. 4.92 wieder die Gravitationskraft aus Gl. 4.14.

4.9.2 Kinetische Energie

Da die tangentiale Komponente F_T der Kraft entlang des Weges $d\vec{r}$ die Geschwindigkeit ändert, gilt

$$F_T = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4.99}$$

Daher folgt auch

$$\vec{F}\,d\vec{r} = F_T\,ds = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,ds = m\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,dv = m\,v\,dv \tag{4.100}$$

Damit ist die Arbeit auch

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\,d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\,v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,(v_B^2 - v_A^2) \tag{4.101}$$

Wir definieren daher die kinetische Energie als

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \;=\; \frac{\vec{p}^2}{2\,m}} \tag{4.102}$$

Die Arbeit, die ein Kraftfeld an einer Masse verrichtet, erzeugt also zusätzliche kinetische Energie

Kinetische Energie E_{kin}
$[E_{kin}] = J = \frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}$

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\,d\vec{r} = E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A)} \tag{4.103}$$

4.9.3 Energieerhaltung der klassischen Mechanik

Wir haben nun

$$\begin{aligned} W &= E_{kin}(\vec{r}_B) - E_{kin}(\vec{r}_A) \\ W &= E_{pot}(\vec{r}_A) - E_{pot}(\vec{r}_B) \end{aligned} \tag{4.104}$$

und damit auch

$$\boxed{E := E_{kin}(\vec{r}_A) + E_{pot}(\vec{r}_A) = E_{kin}(\vec{r}_B) + E_{pot}(\vec{r}_B)} \tag{4.105}$$

In einem konservativen Kraftfeld ist also die Gesamtenergie E aus kinetischer und potentieller Energie entlang eines Weges erhalten.

Beispiel Feder: Eine Feder wird um die Strecke x_A ausgelenkt und mit $v_A = 0$ losgelassen. Wie groß ist die kinetische Energie und die Geschwindigkeit maximal?
Lösung Nach Gl. 4.105

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_A^2}_{E_{kin,A}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_A^2}_{E_{pot,A}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_B^2}_{E_{kin,B}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_B^2}_{E_{pot,B}} \tag{4.106}$$

gilt bei $x_B = 0$, dass $E_{pot,B} = 0$, so dass

$$E_{kin,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kx_A^2 \tag{4.107}$$

oder $v_B^2 = \omega^2 x_B^2$.

Berechnung der Bahnkurve bei bekannter potentieller Energie: Für eine 1-dimensionale Bewegung gilt

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_{pot}(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + E_{pot}(x) \tag{4.108}$$

so dass

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_{pot}(x))}}dx = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \tag{4.109}$$

Da E konstant ist, kann man dies integrieren und erhält so die Bahnkurve $x(t)$.

4.10 Drehbewegungen

Drehbewegungen spielen eine große Rolle bei so unterschiedlichen Prozessen wie Planetenbewegungen oder in Motoren. In vielen Fällen handelt es sich um eine Bewegung im Kreis mit konstantem Betrag der Geschwindigkeit.

Bewegt man eine Masse an einer Feder im Kreis, so wird die Feder ausgelenkt, je schneller die Kreisbewegung erfolgt und je größer die Masse ist. Es wirkt also offenbar eine Kraft, um die Masse auf der Kreisbahn zu halten.

Die Bahnkurve einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung des Koordinatensystem in der $x-y$-Ebene ist

$$\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.110}$$

φ im Bogenmaß
Winkelgeschwindigkeit ω

Der Winkel $\varphi(t)$ wird relativ zur x-Achse gemessen. Diese ist so orientiert, dass $\varphi(t=0) = 0$ ist. Wir definieren die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$. Die Bahngeschwindigkeit ist damit

$$\vec{v}(t) = \dot{\varphi}(t) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.111}$$

und ihr Betrag

$$\boxed{v = \omega \cdot R} \tag{4.112}$$

Die entsprechende Beschleunigung ist

$$\vec{a}(t) = \ddot{\varphi} R \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}^2 R \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) \end{pmatrix} \tag{4.113}$$

oder

$$\vec{a} = \dot{\omega} R \vec{e}_v - \omega^2 \cdot \vec{r} \tag{4.114}$$

Der erste Term ist parallel zu $\vec{v}$ und erhöht die Winkelgeschwindigkeit. Der zweite Term zeigt immer von der Bahnkurve zum Zentrum der Bahn. Der Betrag dieses Teils der Beschleunigung ist

$$a = \omega^2 \cdot R \tag{4.115}$$

Um also einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten, ist eine nach innen gerichtete Kraft

$$\boxed{F = m \cdot \omega^2 \cdot R} \tag{4.116}$$

notwendig, die Zentripetalkraft genannt wird. Auch die kinetische Energie der Masse auf der Kreisbahn, die Rotationsenergie, hängt von der Winkelgeschwindigkeit ab,

Zentripetalkraft einer Kreisbahn

$$E_{rot} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \tag{4.117}$$

Mit dem Traägheitsmoment I lässt sich dies schreiben als

Trägheitsmoment I
Rotationsenergie E_{rot}

$$\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad I = m r^2} \tag{4.118}$$

4.11 Drehimpuls und Drehmoment

Wir definieren allgemein den Drehimpuls eines Massenpunktes relativ zum Ursprung des Koordinatensystems,

$$\boxed{\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}} \tag{4.119}$$

Hier ist $\vec{r}$ wie immer der Abstand des Massenpunkts vom Koordinatenursprung. Der Drehimpuls $\vec{L}$ hängt damit - anders als Impuls oder Energie - von der Wahl des Koordinatenursprungs ab[5]. Wegen des Kreuzprodukts steht $\vec{L}$ senkrecht auf der Ebene, die von $\vec{r}$ und $\vec{p}$ aufgespannt wird. Für eine geradlinig gleichförmige Bewegung ist der Drehimpuls gerade das Produkt von Impuls p und Stoßparameter d, wobei der Stoßparameter der minimale Abstand der Bahnkurve vom Ursprung ist.

Drehimpuls $\vec{L}$
$[\vec{L}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$

[5] Bezüglich eines anderen Punktes $\vec{x}_0$ wäre

$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} \tag{4.120}$$

Beispiel Kreisbewegung: Wählt man den Ursprung des Koodinatensystems in der Mitte der Kreisbahn, so ist

$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega \tag{4.121}$$

Man bezeichnet nun allgemein als Trägheitsmoment

$$\boxed{I = m\,r^2} \tag{4.122}$$

Trägheitsmoment I
$[I] = \mathrm{kgm}^2$

so dass

$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}} \tag{4.123}$$

Hier ist also $\vec{\omega}$ eine Vektor, der in die Richtung von $\vec{L}$ zeigt und aus $\vec{r} \times \vec{p}$ berechnet werden kann.

Drehmoment: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses muss mit Kräften zusammen hängen. Es ist (bei m = konstant)

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \tag{4.124}$$

oder Wir definieren daher das Drehmoment, bezüglich des Koordinatenursprungs als

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{4.125}$$

Drehmoment $\vec{M}$
$[\vec{M}] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

so dass

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} \tag{4.126}$$

Eine äußeres Drehmoment erzeugt daher eine Änderung des Drehimpulses.

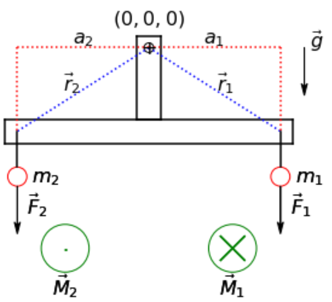

Abb. 4.16
Drehmomente bei einer Waage.

Beispiel Waage: Bei einer Waage mit zwei Gewichten m_1, m_2 wie in Abb. 4.16 sind die beiden dazugehörigen Drehmomente

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 = \vec{r}_1\ times \vec{F}_1 \quad &\Rightarrow \quad M_1 = a_1 \cdot F_1 \\ \vec{M}_2 = \vec{r}_2\ times \vec{F}_2 \quad &\Rightarrow \quad M_2 = a_2 \cdot F_2 \end{aligned} \tag{4.127}$$

Ist die Waage für einen Moment im Gleichgewicht und bleibt sie so, dann gilt das Hebelgesetz

$$\dot{\vec{L}} = 0 = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{4.128}$$

oder

$$\boxed{a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2} \tag{4.129}$$

Allgemein definieren wir daher das Gleichgewicht eines Systems als

$$\boxed{\text{Gleichgewicht:} \qquad \sum \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M} = 0} \tag{4.130}$$