also

$$\boxed{y(t) = A\,\sin\omega t + B\,\cos\omega t} \tag{4.49}$$

Daraus folgt auch die Geschwindigkeit $\dot{y}(t)$ der Auslenkung,

$$v(t) = \dot{y}(t) = \omega A\,\cos\omega t - \omega B\,\sin\omega t \tag{4.50}$$

Hat man nun z.B. die Auslenkung $y(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ zur Zeit $t = 0$ gegeben, so folgt aus den Eigenschaften von sin und cos sofort

$$B = y(0) \qquad\qquad \omega A = v(0) \tag{4.51}$$

Die beiden Unbekannten A,B der allgemeinen Lösung folgen also aus den beiden Anfangsbedingungen.

Die Werte für C und φ_0 erhält man aus

$$C = \pm\sqrt{A^2 + B^2} \qquad\qquad \tan\varphi_0 = \frac{B}{A} \tag{4.52}$$

Aufgabe 4.3: Warum sind die Werte von C und φ_0 nicht eindeutig?

4.7 Probleme mit variablen Massen

Wenn man auf einer Waage steht, so zeigt sie die Gewichtskraft des Körpers an. Man man dann hochspringt, und mit Geschwindigkeit wieder auf der Waage landet, so zeigt sie kurzeitig eine viel höhere Kraft an als nur die Gewichtskraft.

Dieser *Kraftstoß* lässt sich durch Newton's Axiom verstehen, denn aus

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

folgt

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t \tag{4.53}$$

Integriert man über die Zeit des Kraftstoßes, erhält man

$$\vec{p}(t) - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt \tag{4.54}$$

Die Impulsänderung zwischen Anfang und Ende des Kraftstoßes führt also im Mittel zu einer Kraft. Für das Beispiel des Sprungs auf eine Waage ist $\vec{p}_0$ der Impuls des Körpers unmittelbar vor der Landung auf der Waage und $\vec{p}(t) = 0$ ist der Impuls nach der Landung.

Beispiel: inelastischer Stoß: Eine Masse mit Impuls $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ stößt auf eine zweite, ruhende Masse mit Impuls $\vec{p}_2 = 0$, und zwar so, dass beide Massen nach dem Stoß aneinander haften. Ihre gemeinsame Geschwindigkeit anschließend sei $\vec{v}'$. Offenbar ist die Masse 2 hier durch einen Kraftstoß beschleunigt worden. Da keine äußeren Kräfte wirken, kann man Impulserhaltung anwenden, um die neue Geschwindigkeit $\vec{v}'$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ (m_1 + m_2)\,\vec{v}' &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Offenbar muss man gar nicht wissen, wie genau der Kraftstoß zwischen den beiden Massen abgelaufen ist, solange man nur an dem Endergebnis $\vec{v}'$ interessiert ist.

Beispiel: Sand rieselt auf eine Waage Die Auftreffgeschwindigkeit auf die Waage sei $v_0 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Bei konstanter Rate von

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 10\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}}$$

ist die Impulsänderung $d\vec{p}$ von einer kleinen Sandmenge dm auf der Waage

$$dp = dm\,(v_E - v_0) = -dm\,v_0$$

Daher wirkt die Kraft

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,v_0 = 10\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\,\frac{\mathrm{gm}}{\mathrm{s}^2}$$

Die Waage zeigt daher zunächst ein Gewicht von

$$M = \frac{F}{g} = \frac{20\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}04\,\mathrm{g}$$

an. Im Laufe der Zeit steigt natürlich die Sandmenge, die bereits auf der Waage liegt. Dieses Gewicht kommt natürlich noch hinzu.

Gleichung einer Rakete Bei einer Rakete wird durch die Verbrennung von Treibstoff sehr viel Gas erzeugt, dass mit hoher Geschwindigkeit nach hinten ausgestoßen wird. Wegen Impulserhaltung erzeugt dies einen Rückstoß auf die Rakete. Bei Raketen ist der Treibstoffverlust und damit die Massenänderung so groß, dass man diesen Effekt nicht mehr vernachlässigen kann (siehe Gl. 4.6).

Sei zu jedem Zeitpunkt t während des Starts der Rakete

- $m(t)$ die Masse von Rakete + restlichem Treibstoff
- $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete relativ zu einem Inertialsystem
- $\vec{v}_G$ ist die Geschwindigkeit des ausgestoßenen Gases relativ zur Rakete

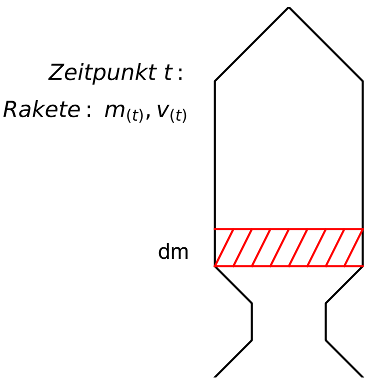

Abb. 4.9
Rakete zum Zeitpunkt t.

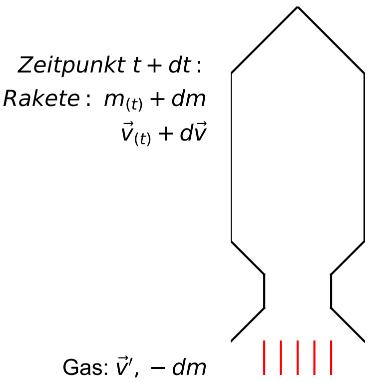

Abb. 4.10
Rakete zum Zeitpunkt $t + dt$.

- $\vec{v}'(t)$ die Geschwindigkeit des ausgestoßenen Gases relativ zum Inertialsystem
- dm_G die Masse des Gases, das in diesem Zeitintervall dt ausgestoßen wird. Die Änderung für die Rakete ist dann $dm = -dm_G$.

Damit ist der Impuls von Rakete + Treibstoff zur Zeit t

$$\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Zur Zeit $t + dt$ ist der Gesamtimpuls aus Rakete und Gas

$$\vec{p}(t + dt) = \underbrace{(m + dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v})}_{\text{Rakete}} + \underbrace{dm_G \cdot \vec{v}'}_{\text{Gas}}$$

Die Änderung des Gesamtimpulses zwischen t und $t + dt$ ist [4]

$$\begin{aligned} d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) &= m\, d\vec{v} - dm \cdot (\vec{v}' - \vec{v}) + dm \cdot d\vec{v} \\ &\approx m\, d\vec{v} - dm \cdot \vec{v}_G \end{aligned} \tag{4.57}$$

Im letzten Schritt haben wir das Produkt $dm \cdot d\vec{v}$ vernachlässigt, da es für kleine dt viel kleiner wird als die anderen Terme. Ohne äußere Kräfte gilt Impulserhaltung, so dass $d\vec{p} = 0$ ist. Eine äußere Kraft wie die Gravitation der Erde ändert aber den Gesamtimpuls,

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}_G \tag{4.58}$$

Bei senkrechtem Flug (z-Richtung nach oben) ist $F_z = -mg$ (zumindest nahe der Erdoberfläche) und daher

$$\boxed{-m \cdot g = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot v_G} \tag{4.59}$$

Bewegungsgleichung der Rakete

Die Rakete wird also in $+z$ Richtung beschleunigt ($dv/dt > 0$), wenn die Schubkraft

$$|v_G| \cdot \left| \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \right| > m\, g \tag{4.60}$$

ist. Die Bewegungsgleichung kann man lösen, indem man die Variablen separiert,

$$-g\, dt = dv - \frac{dm}{m} \cdot v_G \tag{4.61}$$

[4] Alternativ kann man sich Gl. 4.57 auch in einem Inertialsystem überlegen, in dem die Rakete genau zum Zeitpunkt t in Ruhe ist und damit keine Geschwindigkeit und keinen Impuls hat. Nach kurzer Zeit dt hat die Rakete eine Gasmenge von dm_G mit Geschwindigkeit $\vec{v}_G$ ausgestoßen, und hat selber eine Geschwindigkeit $d\vec{v}$ erhalten. Die Änderung des Gesamtimpulses ist

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{v} + dm_G \cdot \vec{v}_G = m \cdot d\vec{v} - dm \cdot \vec{v}_G \tag{4.56}$$

Natürlich hat sich die Masse der Rakete in dem kleinen Zeitraum dt selber um die $dm = -dm_G$ geändert. Relativ zur Gesamtmasse der Rakete ist der Effekt aber vernachlässigbar, wenn der Zeitraum dt infinitesimal klein ist.

Bei konstanter Geschwindigkeit des Gases v_G diese Gleichung integrieren,

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t} g\,dt &= \int_{v_0}^{v(t)} dv - \int_{m_0}^{m(t)} v_G \frac{1}{m}\,dm \\ -g(t-t_0) &= v(t) - v_0 \quad - v_G \ln\frac{m(t)}{m_0} \end{aligned} \tag{4.62}$$

oder

$$v(t) = v_0 - g(t-t_0) + v_G \cdot \ln\frac{m(t)}{m_0} \tag{4.63}$$

Da hier $v_G < 0$ (entgegen $\vec{v}$) und $m_0 > m(t > t_0)$ schreibt man besser

$$\boxed{v(t) = v_0 - g(t-t_0) + |v_G| \cdot \ln\frac{m_0}{m(t)}} \tag{4.64}$$

Aufgabe 4.4: Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete durch ableiten nach der Zeit. Zeigen Sie, dass Sie wieder die Bewegungsgleichung 4.59 erhalten.