Reibung lässt sich relativ einfach durch eine schiefe Ebene messen. Stellt man die Ebene schief, so gerät der Körper bei einem bestimmten Winkel ins Rutschen. Die Haftreibung ergibt sich für diesen Winkel aus $F_R = -F_{||}$,

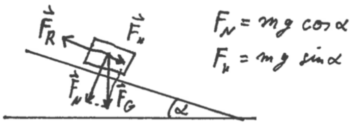

Abb. 4.7

$$m\,g\,\sin\alpha = \mu\,m\,g\,\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \tan\alpha \tag{4.30}$$

Stokes-Reibung: In Flüssigkeiten erfahren relativ kleine und langsame Körper eine Reibungskraft. Ist die Geschwindigkeit v klein genug, so ist die Strömung wirbelfrei. Dies gilt z.B. für kleine Kugeln in Flüssigkeiten. Die Reibungskraft ist in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit v und zum Radius r der Kugel,

$$F_R = 6\,\pi\,r\,\eta\,v \tag{4.31}$$

Hier ist η die Viskosität der Flüssigkeit. Wird die Kugel durch die Gewichtskraft beschleunigt und durch die Reibungskraft abgebremst, so stellt sich nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit v_0 ein, entsprechend

$$m\,g - 6\,\pi\,r\,\eta\,v = 0 \tag{4.32}$$

Newton-Reibung: Bei schnellen Bewegungen großer Körper z.B. in Luft ist die Verdrängung der Luft der wichtigere Effekt. Es handelt sich also weniger um einen Oberflächeneffekt. Bei einer Querschnittsfläche A senkrecht zur Geschwindigkeit v ist die Reibungskraft proportional zur Dichte ρ der Luft,

$$F_R = \frac{1}{2}\,c_W\,\rho\,A\,v^2 \tag{4.33}$$

Hier ist c_W ein Faktor, der die Form und Windschnittigkeit des Körpers zusammenfasst. Diese Newton-Reibung wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit.

4.6 Harmonischer Oszillator

Ein *harmonischer Oszillator* ist allgemein ein physikalisches System, dass nach Auslenkung aus seiner Ruhelage eine in Gegenrichtung wirkende Kraft entwickelt, deren Größe linear von der Auslenkung abhängt. Fast alle physikalischen Systeme haben nahe ihres Gleichgewichts näherungsweise diese Eigenschaft, so dass die Lösung ganz allgemein für beliebige harmonische Oszillatoren von herausragender Bedeutung ist.

Beispiel 1: Feder Eine Masse m an einer Feder wird relativ zu ihrer Ruhelage um eine Strecke x ausgelenkt. Die Feder übt dann eine Kraft $F = -kx$ in Gegenrichtung aus. Lässt man die Masse los, so beobachtet man eine Schwingung der Masse an der Feder. Die Bewegungsgleichung (siehe Gl.4.23)

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\, x = 0} \tag{4.34}$$

muss demnach als Lösung eine Schwingung $x(t)$ haben.

Beispiel 2: Pendel Eine Masse m hängt an einem Faden der Länge l. Diese Pendel wird relativ zu seiner Ruhelage um einen Winkel φ ausgelenkt. Da der Faden des Pendels seine Länge praktisch gar nicht ändern kann, erzeugt nur die Komponente der Gewichtskraft senkrecht zum Faden eine wirksame Beschleunigung. Diese Tangentialkomponente ist

$$F_T = -F_G \sin\varphi = -m\, g \sin\varphi \tag{4.35}$$

und zeigt entgegen der Auslenkungsrichtung φ. Die Strecke x entlang der Bahn der Masse hängt vom Winkel φ ab, die Tangentialbeschleunigung daher von der zweiten Ableitung von φ,

Merken:
Winkel in Radian $=$
Winkel in Grad $\cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{57}$

$$x_T = l\,\varphi \qquad \Rightarrow \qquad a_T = \ddot{x}_T = l\,\ddot{\varphi} \tag{4.36}$$

Damit folgt die Bewegungsgleichung aus

$$F_T = m\,a_T \qquad \Rightarrow \qquad -m\,g \sin\varphi = m\,l\,\ddot{\varphi} \tag{4.37}$$

und damit

Bewegungsgleichung des Pendels

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0} \tag{4.38}$$

Für kleine Auslenkungen kann man nun eine Näherung[2] durchführen,

$$\sin\varphi \approx \varphi \qquad \text{für } \varphi \text{ im Bogenmaß} \tag{4.40}$$

Damit gilt also näherungsweise

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0} \tag{4.41}$$

Gleichgewichte:

- Stabiles Gleichgewicht: Den beiden Beispielen der Feder und des Pendels ist gemeinsam, dass sie zu einem stabilen Gleichgewicht zurückkehren können, denn es wirkt eine Kraft, die gegen eine Auslenkung aus der Ruhelage gerichtet ist. Im Gleichgewicht (Auslenkung $y = 0$) selber heben sich alle Kräfte auf.

[2]Zum Beispiel ist für einen Winkel von

$$\text{Winkel} = 10^0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \varphi &\approx 0{,}17453 \\ \sin\varphi &\approx 0{,}17365 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Für kleinere Winkel ist der relative Unterschied zwischen Winkel (im Bogenmaß) und Sinus des Winkels noch kleiner. Tatsächlich ist die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ der erste Term der Polynom-Entwicklung (Taylor-Entwicklung) des Sinus $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \ldots$.

- Instabiles Gleichgewicht: Ein Ball kann zum Beispiel ganz oben auf einem Berg ruhen, er rollt aber bei jeder kleinen Auslenkung weiter von der ursprünglichen Ruhelage weg.

- Metastabiles Gleichgewicht: Ein Beispiel hierfür ist ein Ball auf einem ebenem Tisch. Wird der Ball versetzt, so treibt nichts ihn zurück, aber er kann dort liegen bleiben, wo er hingelegt wird.

Der allgemeine harmonische Oszillator: Nahe einer stabilen Gleichgewichtslage, also bei kleinen Auslenkungen wird bei den meisten physikalischen Systemen die rückstellende Kraft näherungsweise linear von der Auslenkung abhängen. Wie bei der Feder in Gl. 4.23 und beim Pendel in Gl. 4.23 gesehen, ergibt sich aus Newton's Axiom dann eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung $y(t)$ und ihrer Beschleunigung $\ddot{y}(t)$ in der Form

$$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0} \tag{4.42}$$

Kreisfrequenz ω
$[\omega] = \frac{1}{\mathrm{s}}$

Die sogenannte Kreisfrequenz ω ist eine Konstante, die für die beiden Beispiele

$$\boxed{\text{Feder: } \omega_F = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{Pendel: } \omega_P = \sqrt{\frac{g}{l}}} \tag{4.43}$$

lautet. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des hamonischen Oszillators ist

$$\boxed{y(t) = C\,\sin(\omega t + \varphi_0)} \tag{4.44}$$

Das dieser Ansatz tatsächlich eine Lösung der Bewegungsgleichung Gl. 4.42 ist, kann man durch Einsetzen beweisen. Dazu brauchen wir die zweite Ableitung,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \omega\, C\,\cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{y}(t) &= -\omega^2 C\,\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t) \end{aligned} \tag{4.45}$$

Dieser Ausdruck, $\ddot{y} = -\omega^2 y$, erfüllt ganz offenbar Gleichung 4.42. Wir haben hiermit also eine Lösung gefunden. Auf den mathematischen Beweis, dass dies die allgemeinste Lösung, verzichten wir hier.

Die gefundene Lösung lässt sich wie folgt interpretieren:

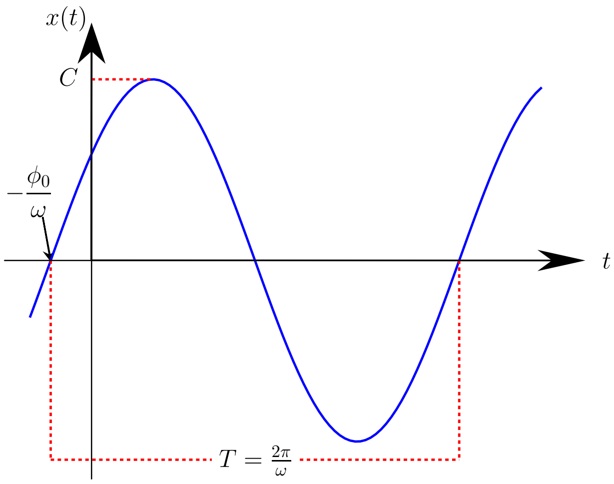

Abb. 4.8 Allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators

- Amplitude C: Die sin-Funktion beschreibt offenbar eine Schwingung als Funktion der Zeit. Da der Sinus immer zwischen $+1$ und -1 liegt, gibt der Faktor C offenbar den maximale Auslenkung des Systems in + und − Richtung an, die Amplitude.

- Kreisfrequenz ω: Die beobachtbare Schwingung wiederholt sich jeweils nach einer Zeitdauer T,

$$y(t+T) = y(t) \tag{4.46}$$

  Andererseit wiederholt sich die Sinusfunktion jeweils nach 2π (360^0 im Bogenmaß), also

$$C\ \sin\left(\omega(t+T)+\varphi_0\right) = C\ \sin\left(\omega t+\varphi_0+2\pi\right) \tag{4.47}$$

  und damit $\omega T = 2\pi$ oder

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{4.48}$$

  Die Konstante ω zeigt daher an, in Vielfachen von 2π, wie häufig pro Sekunde sich die Schwingung wiederholt. Sie wird daher Kreisfrequenz genannt.

- Anfangsphase φ_0: Diese Konstante verschiebt nur die Funktion $y(t)$ entlang der Zeitachse, sie gibt also die Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ der Schwingung wieder.

Um bei der Bestimmung von φ_0 den Anfangszustand der Schwingung zu berücksichtigen, ist es oft praktischer, die Lösung etwas um zu formulieren. Es ist[3]

$$\begin{aligned} y(t) &= C\ \sin\left(\omega t+\varphi_0\right) \\ &= C\ \left(\sin\omega t\ \cos\varphi_0 + \cos\omega t\ \sin\varphi_0\right) \\ &= \underbrace{C\ \cos\varphi_0}_{A}\ \sin\omega t + \underbrace{C\ \sin\varphi_0}_{B}\ \cos\omega t \end{aligned}$$

[3]Additionstheorem für sin und cos: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$

also

$$\boxed{y(t) = A\ \sin\omega t + B\ \cos\omega t} \tag{4.49}$$

Daraus folgt auch die Geschwindigkeit $\dot{y}(t)$ der Auslenkung,

$$v(t) = \dot{y}(t) = \omega A\ \cos\omega t - \omega B\ \sin\omega t \tag{4.50}$$

Hat man nun z.B. die Auslenkung $y(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v(0)$ zur Zeit $t = 0$ gegeben, so folgt aus den Eigenschaften von sin und cos sofort

$$B = y(0) \qquad\qquad \omega A = v(0) \tag{4.51}$$

Die beiden Unbekannten A,B der allgemeinen Lösung folgen also aus den beiden Anfangsbedingungen.

Die Werte für C und φ_0 erhält man aus

$$C = \pm\sqrt{A^2 + B^2} \qquad\qquad \tan\varphi_0 = \frac{B}{A} \tag{4.52}$$

Aufgabe 4.3: Warum sind die Werte von C und φ_0 nicht eindeutig?