3.3.4 Spezialfälle

Gleichförmige Bewegung: Ohne Beschleunigung gilt:

$$\boxed{a = 0 \qquad v = v_0 \qquad x = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0)} \tag{3.16}$$

Wählt man ausserdem das Koordinatensystem so, dass das Teilchen bei $t = 0$ gerade bei $x_0 = 0$ ist, so gilt

$$x = v_0 \cdot t \tag{3.17}$$

Konstante Beschleunigung: Für a =konstant kann man in Gl. 3.14 das Integral ausführen und findet

$$\boxed{v = v_0 + a \cdot (t - t_0)} \tag{3.18}$$

Dies kann man wiederum in Gl. 3.15 einsetzen und das Integral über die Zeit ausführen,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t - t_0))\, dt \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt \; + \; \int_{t_0}^{t} a(t - t_0))\, dt \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) \; + \; a \cdot \int_{t_0}^{t} (t - t_0))\, dt \end{aligned} \tag{3.19}$$

Daraus folgt

$$\boxed{x = x_0 \; + \; v_0 \cdot (t - t_0) \; + \; \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2} \tag{3.20}$$

Wählt man auch hier wieder das Koordinatensystem so, dass das Teilchen bei $t = 0$ gerade bei $x_0 = 0$ ist, so gilt

$$x = v_0 \cdot t \; + \; \frac{1}{2} a\, t^2 \tag{3.21}$$

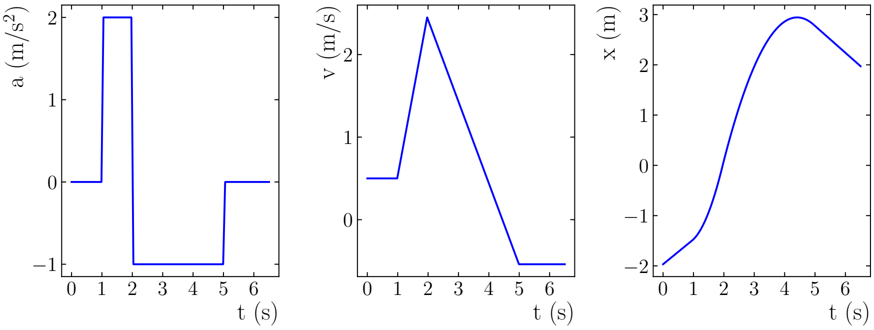

Abb. 3.6 Beispiel einer in bestimmten Zeitintervallen konstanten Beschleunigung (links) und der damit aus Gl. 3.20 folgenden Geschwindigkeit (Mitte) und Ortskurve (rechts) für $v_0 = 0{,}5$ m/s und $x_0 = -2$ m.

Aufgabe 3.1: Ein Ball wird mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geworfen. Nach welcher Zeit kommt der Ball wieder am Boden auf ? Annahme: Konstante Erdbeschleunigung $a = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Lösung: Wähle Koordinatensystem so, dass x senkrecht nach oben zeigt. Erdbeschleunigung zeigt damit in $-x$ Richtung, d.h. $a = -9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wähle Anfangshöhe $x_0 = 0$ und Anfangzeit $t_0 = 0$ s. Ball schlägt wieder auf Boden auf, wenn $x(t) = 0 =$ Anfangshöhe. Also nach Gl. 3.20

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
0 &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
&\Rightarrow t = 0 \qquad \text{oder} \qquad 0 = v_0 + \frac{1}{2}at \\
&\Rightarrow \qquad t = -2\,\frac{v_0}{a}
\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Im höchsten Punkt des Flugs ist $v(t_{max}) = 0$. Daher

$$v(t_{max}) = v_0 + a\,t_{max} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{max} \;= -\frac{v_0}{a}$$

Die Gesamtzeit ist offenbar doppelt so groß wie die Flugzeit zum höchsten Punkt, $t = 2\,t_{max}$. Zahlen einsetzen ergibt:

$$t = -2\,\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\;\frac{\mathrm{s}^2}{-9{,}81\,\mathrm{m}} = 4{,}077\,\mathrm{s}$$

Die Flughöhe ist gegeben durch

$$x(t_{max}) = v_0\,t_{max} + \frac{1}{2}\,a\,t_{max}^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{a} = 20{,}39\,\mathrm{m}$$

Wiederholen Sie die Rechnung mit $x_0 = 5$ m und $t_0 =$ 10 s

3.4 Drei-dimensionale Bewegung

Bewegt sich ein Massenpunkt nicht nur in eine Richtung, sondern gleichzeitig in alle drei Raumrichtungen, so gibt es auch drei Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Der Abstand r vom Ursprung des Koordinatensystems ist dabei

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gemäß den drei Bahnkurven gibt es auch drei Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z in die drei Raumrichtungen.

$$v_x := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad v_z := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Um nun nicht immer mehrere Gleichungen schreiben zu müssen, fassen wir alle Größen, die mit Richtungen im Raum zu tun haben, zu Vektoren zusammen.

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Schreibt man nun den Geschwindigkeitsvektor als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

gilt also

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{3.24}$$

Ableitung eines Vektors: komponentenweise

Dies sind eigentlich drei Gleichungen, eine für jede Komponente im Raum. Die Formel sieht aber genauso aus wie bei der eindimensionalen Geschwindigkeit ($v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$), nur ist sie jetzt eben vektoriell.

Analog kann man für die Beschleunigungen a_x, a_y, a_z in die drei Raumrichtungen vorgehen. Mit

$$a_x := \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad a_y := \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \qquad a_z := \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

und

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

folgt

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{3.26}$$

Auch hier kann man, wie in Gl. 3.14, die Formeln wieder umdrehen und in Integrale verwandeln. Allgemein gilt also

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}\, dt} \tag{3.27}$$

Integrale über Vektoren: komponentenweise

sowie

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\, dt} \tag{3.28}$$

Die vom ein-dimensionalen her bekannte Beziehung zwischen $v(x)$ und $a(x)$ in Gl. 3.15 lässt sich auch in ein sogenanntes Linienintegral umformen, dessen Berechnungsmethode aber erst später besprochen wird.

3.4.1 Schiefer Wurf

Wirft man einen Ball schräg nach oben, so wird er eine Bahnkurve verfolgen, die einen höchsten Punkt erreicht, bevor der Ball wieder den Boden berührt. In einem Koordinatensystem, bei dem die z-Achse nach oben zeigt, sei die Anfangsgeschwindigkeit und die Erdbeschleunigung

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a_z = -9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Wählt man wieder den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ und den Ursprung des Koordinatensystems so, dass $\vec{r}_0 = 0$, so gilt

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\vec{a}\, t^2 \quad = \begin{pmatrix} v_{0x}\, t \\ 0 \\ v_{0z}\, t + \frac{1}{2}\, a_z\, t^2 \end{pmatrix}$$

Dies sind drei unabhängige Bewegungsgleichungen, die getrennt gelöst werden können. Aus der Gleichung für z folgt wieder die Flugzeit wie in Abschnitt 3.3.4,

$$t = -2 v_{0z} / a_z$$

. Eingesetzt in die Gleichung für x ergibt sich die Wurfweite

$$x = v_{0x}\, t = -2 \frac{v_{0x}\, v_{0z}}{a_z}$$

Wirft man unter einem Winkel α_0, so dass $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$ und $v_{0z} = v_0 \sin\alpha_0$, so folgt für die Wurfweite

$$x = -2 \frac{v_0^2\ \sin\alpha_0\ \cos\alpha_0}{a_z}$$