Ausgabe: 27.10.2015
Fällig am: 3.11.2015
Diskussion: 6.11.2015

Institut für Experimentalphysik

Exercises to Advanced Particle Physics

WS 15/16

Roman Kogler, Peter Schleper

Blatt 2

Aufgabe 1: Lösung der Dirac-Gleichung — 6 Punkte

a) Zeigen Sie durch Taylorreihenentwicklung, dass

$$\partial^\mu \psi = -ip^\mu \psi,$$

wenn ψ eine Lösung der Dirac-Gleichung ist und gegeben ist durch

$$\psi = u^{(1,2)}(p)\mathrm{e}^{-ip^\mu x_\mu}.$$

b) Beweisen Sie die Relation

$$(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2.$$

c) In der Dirac-Pauli Darstellung der γ-Matrizen ist

$$\gamma^\mu p_\mu - m = \begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E-m \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungen für die Spinoren der Teilchen (u) und Antiteilchen (v) durch

$$u^{(1,2)}(p) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\chi^{(1,2)} \end{pmatrix}, \qquad v^{(1,2)}(p) = \pm N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{pmatrix}$$

gegeben sind, wobei $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Helizität und Chiralität **6 Punkte**

a) Der Operator $\vec{\Sigma}$ ist gegeben durch

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{\sigma}$ die Pauli-Matrizen sind. Zeigen Sie explizit, dass folgende Bedingungen gegeben sind:

- $\Sigma^1 = i\gamma^2\gamma^3$
- $\Sigma^2 = i\gamma^3\gamma^1$
- $\Sigma^3 = i\gamma^1\gamma^2$
- $\vec{\Sigma} = \gamma^5\gamma^0\vec{\gamma}$

b) Zeigen Sie, dass der Chiralitätsoperator für masselose Fermionen dem Helizitätsoperator entspricht:

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)\psi = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\psi\,.$$

Tipp:
Verwenden Sie die Relation $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$. Finden Sie einen Ausdruck für γ^0 durch die Dirac-Gleichung für masselose Fermionen, $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$. Die Lösung erhalten Sie unter Verwendung der Relationen aus Aufgabe a und des Antikommutators $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$.

Aufgabe 3: Klein-Gordon Gleichung **6 Punkte**

Seien Φ_1 und Φ_2 reelle Lösungen der Klein-Gordon Gleichungen mit den zugehörigen Lagrange-Dichten

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_1) - \frac{1}{2}m^2\Phi_1^2,$$
$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_2)(\partial^\mu\Phi_2) - \frac{1}{2}m^2\Phi_2^2.$$

Zeigen Sie, dass für die komplexe Funktion

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$$

die entsprechende Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)\,(\partial^\mu\Phi)^* - \frac{1}{2}m^2\Phi\Phi^* = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2.$$

Warum erfüllt diese Lagrange-Dichte die Bewegungsgleichungen für freie Φ_1 und Φ_2?