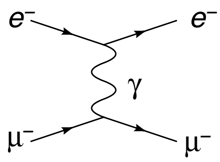
# 6 Prozesse der QED

## 6.1 Berechnung des Prozesses $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$




Beispielhaft soll das Matrixelement des Prozesses $e^-(p_1)\ \mu^-(p_2) \to e^-(p_3)\ \mu^-(p_4)$ berechnet werden, wobei der 4-er Impuls des ausgetauschten Photons $q = p_1 - p_3$ ist. Das Matrixelement $M$ ergibt sich aus den Feynmanregeln der QED

$$
\begin{aligned}
-iM &= \underbrace{\bar{u}_3 i q_e \gamma^\mu u_1}_{\text{e-Strom}} \underbrace{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}}_{\gamma\text{-Propagator}} \underbrace{\bar{u}_4 i q_m \gamma^\nu u_2}_{\mu\text{-Strom}} \\
M &= -\frac{e^2}{q^2}\ \bar{u}_3\,\gamma^\mu\,u_1\ \ \bar{u}_4\,\gamma_\mu\,u_2,
\end{aligned}
$$

mit elektrischer Ladung $e^2 = q_e q_m$. Die Spinoren $u_i = u(p_i, s_i)$ hängen von den Impulsen $p_i$ und Spin-Orientierungen $s_i$ ab. Das Matrixelement für die Streuung unpolarisierter Teilchen ergibt sich aus der

- Mittelung über die einlaufenden Spin-Zustände, (zur Normierung, wenn beide Polarisationsrichtungen gleich häufig sind),
- Summation über die auslaufenden Spin-Zustände (wenn der Spin im Endzustand nicht gemessen wird).

$$|\bar{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{Muon}}$$

mit dem Elektron-Tensor (Muon Tensor analog)

$$
\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{\text{e-Spin}} [\bar{u}_3\gamma^\mu u_1]\,[\bar{u}_3\gamma^\nu u_1]^* \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\text{e-Spin}} [\bar{u}_3\gamma^\mu u_1]\,[\bar{u}_1\gamma^\nu u_3]
\end{aligned}
$$

wobei der Spin-Faktor $\frac{1}{2}$ für den Mittelwert über verschiedene einlaufende Spin-Richtungen notwendig ist. Hierbei wurde benutzt, dass $[\bar{u}_3\gamma^\nu u_1] = a$ nur eine Zahl ist und daher transponiert werden darf ($a^* = a^\dagger$) und dass $[\bar{u}_3\gamma^\nu u_1]^\dagger = [\bar{u}_1\gamma^\nu u_3]$. Ausgeschrieben und getrennt summiert über die einlaufenden und auslaufenden Spin-Zustände ist dies

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\sum_{s_3}\sum_{s_1} \bar{u}_{3,a}\gamma^{\mu}_{ab}u_{1,b}\ \ \bar{u}_{1,c}\gamma^{\nu}_{cd}u_{3,d} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{s_3} u_{3,d}\bar{u}_{3,a}}_{(\not p_3+m_e)_{da}}\gamma^{\mu}_{ab}\ \ \underbrace{\sum_{s_1} u_{1,b}\bar{u}_{1,c}}_{(\not p_1+m_e)_{bc}}\gamma^{\nu}_{cd} \\ &= \frac{1}{2}Spur\left[(\not p_3+m_e)\gamma^{\mu}(\not p_1+m_e)\gamma^{\nu}\right] \end{aligned}$$

unter Benutzung der Vollständigkeitsrelationen der Spinoren (siehe Anhang A) und der Notation $\not p = \gamma_\alpha p^\alpha$. Die Spurtheoreme[13] erlauben die Vereinfachung

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}Spur\left[(\not p_3+m_e)\gamma^{\mu}(\not p_1+m_e)\gamma^{\nu}\right] \\ &= \frac{1}{2}Spur\left[\not p_3\gamma^{\mu}\not p_1\gamma^{\nu}+m_e^2\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right] \\ &= 2(p_3^{\mu}p_1^{\nu}+p_3^{\nu}p_1^{\mu}-(p_3p_1-m_e^2)g^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Mit dem analogen Resultat für den Myon-Tensor ist das Resultat für das Matrixelement:

$$|\bar{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}L_e^{\mu\nu}L_{\mu\nu}^{\text{Muon}}$$

gleich

$$\boxed{|\bar{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4}\left[(p_3p_4)(p_1p_2)+(p_3p_2)(p_1p_4)-m_e^2p_2p_4-m_\mu^2p_1p_3+2m_e^2m_\mu^2\right]}$$

Dies ist das exakte Matrix-Element für unpolarisierte $e^-\mu^-$ Streuung in niedrigster Ordnung. Das Ergebnis ist offensichtlich Lorentz-invariant.

Im ultra-relativistischen Limes kann man die Massen-Terme vernachlässigen. Die Skalarprodukte lassen sich durch die in gleicher Näherung geltenden Mandelstam-Variablen ausdrücken.

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = m_e^2+m_\mu^2+2p_1p_2 \approx 2p_1p_2 \approx 2p_3p_4 \\ t &= (p_1-p_3)^2 = 2m_e^2-2p_1p_3 \approx -2p_1p_3 = 2m_\mu^2-2p_2p_4 \approx -2p_2p_4 \\ u &= (p_1-p_4)^2 = m_e^2+m_\mu^2-2p_1p_4 \approx -2p_1p_4 = m_e^2+m_\mu^2-2p_2p_3 \approx -2p_2p_3 \end{aligned}$$

Wegen $t = q^2$ folgt der Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte ultrarelativistische Streuung,

$$|\bar{M}|^2 \approx \frac{8e^4}{t^2}(\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{4}u^2)$$

[13]Die Spur einer Matrix $A$ ist die Summe der Diagonalelemente, $Spur\,A = \sum_i A_{ii}$. Die Spur einer ungeraden Anzahl von $\gamma$-Matrizen ist Null, $Spur(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\kappa) = 0$.
Weiter gilt $Spur(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$, $Spur(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda})$,
$Spur(\not p_1\gamma^\mu\not p_2\gamma^\nu) = 4(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1p_2)g^{\mu\nu})$, $Spur(\not a\not b\not c\not d) = 4[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]$.

oder

$$\boxed{|\bar{M}|^2 \approx 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem früher erhaltenen Resultat für Helizitätsamplituden überein.

- Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Quadrat der Ladung an jedem Vertex, für $e\mu$ Streuung also proportional zu $q_e^2 q_m^2 = e^4$.
- Der Nenner $t$ ist der Photon-Propagator und unterdrückt Streuung mit großem 4-er Impulsübertrag.
- Der Term mit $s^2$ entsteht durch Streuung mit entgegengesetzen Spins, so dass der Gesamtspin $J_Z = 0$ ist, denn $s$ beinhaltet keine Winkelinformation (isotrop, da keine Richtung ausgezeichnet ist).
- Der Term mit $u$ entspricht demnach Streuung mit $J_Z = 1$, also gleichgerichteten Spins der einlaufenden Teilchen.

Mit

$$t = -\frac{s}{2}(1 - cos\Theta^*) \qquad \text{und} \qquad u = -\frac{s}{2}(1 + cos\Theta^*)$$

folgt im CMS für ultrarelativistische Streuung

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\frac{p_f}{p_i}|\bar{M}|^2 \\ &= \frac{1}{64\pi^2 s}2e^4 \frac{1 + \left(\frac{1+cos\Theta^*}{2}\right)^2}{\left(\frac{1-cos\Theta^*}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Das Resultat ist in Fig. **??** gezeigt.