Im Folgenden betrachten wir nur die Näherung erster Ordnung (Born'sche Näherung), $\psi_s \approx \psi^{(1)}$. Damit findet man für das Übergangsmatrixelement:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \int d\vec{x}\, \psi_f^\dagger(x)\, \psi_s(x) \\ &= \delta_{fi} + \int d^4x' \int d\vec{x}\, \psi_f^\dagger(x)\, D(x-x')\, V(x')\, \psi_i(x') \\ &= \delta_{fi} + \int d^4x' \int d\vec{x}\, \bar{\psi}_f(x)\, \gamma^0\, D(x-x')\, V(x')\, \psi_i(x') \\ &= \delta_{fi} - i \int d^4x'\, \bar{\psi}_f(x')\, V(x')\, \psi_i(x') \end{aligned}$$

wobei $\gamma^0\gamma^0 = 1$ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ und im letzten Schritt eine Eigenschaft des Dirac-propagator benutzt wurde (s.o.). Im Falle der QED ist die Störung gegeben durch

$$V(x')\, \psi(x') = q\, \gamma^\mu\, A_\mu(x')\, \psi(x') \tag{5.42}$$

so dass

$$\boxed{S_{fi} = \delta_{fi} - i \int d^4x'\, q\, \bar{\psi}_f(x')\, \gamma^\mu\, \psi_i(x')\, A_\mu(x')} \tag{5.43}$$

Der erste Term, δ_{fi}, entspricht dabei einer Welle, die nicht gestreut wurde, und ist daher nicht weiter von Interesse. Der zweite Term beinhaltet

$$\boxed{j^\mu = q\, \bar{\psi}_f\, \gamma^\mu\, \psi_i} \tag{5.44}$$

Diese Form eines Stroms, der im Gegensatz zur früher definierten Form zwei Wellen mit unterschiedlichen Impulsen kombiniert, ist im Folgenden das zentrale Element der Feynmanregeln für Fermionen.

5.4 Matrixelement

Wir betrachten die Streuung zweier Fermionen aneinander, wobei das Übergangsmatrixelement als Funktion der vorgegebenen Impulse der einlaufenden Teilchen (p_1, p_2) und der auslaufenden Teilchen (p_3, p_4) berechnet werden soll. Die Übergangsmatrixelement in 1. Ordnung ergibt sich, wenn man das Photon-Feld berechnet, das aufgrund des Elektron-Stroms $j_\nu(x')$ entsteht, es zum Ort x propagiert und dort auf den Strom des Muons $j_\mu(x)$ wirken lässt. Da die Ströme aus ausgedehnten Wellenfunktionen bestehen integriert man dabei über alle Orts-Zeit Koordinaten x und x'.

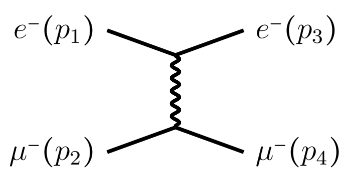

Abb. 5.3
$e^-\mu^-$ Streuung im t-Kanal

Der Strom des Elektrons ist

$$j_e^\nu(x') = q_e \bar{\psi}_3(x')\, \gamma^\nu\, \psi_1(x') \tag{5.45}$$

wobei ψ_1 die Wellenfunktion des einlaufenden Elektrons mit Impuls p_1 bezeichnen soll, etc.. Das Photon-Feld dieses Stroms, berechnet am Ort x, ergibt sich dann aus dem Photon-Propagator (Gl. 5.27) zu

$$A^\mu(x) = \int d^4x' \, D^{\mu\nu}(x-x') \, j_{e,\nu}(x') \tag{5.46}$$

Das Übergangsmatrixelement ergibt sich aus der Anwendung dieses Potentials auf den Myon-Strom,

$$S_{fi}^{(1)} = -iq_m \int d^4x \, \bar{\psi}_4(x) \, \gamma_\mu \, A^\mu(x) \, \psi_2(x) \tag{5.47}$$

Hier ist q_m die Ladung des Myons. In unendlicher Entfernung voneinander sind die ein-und auslaufenden Teilchen durch ebene Wellen gegeben,

$$\psi_1(x') = u_1 \, e^{-ip_1x'} \qquad \psi_3(x') = u_3 \, e^{-ip_3x'} \tag{5.48}$$

$$\psi_2(x) = u_2 \, e^{-ip_2x} \qquad \psi_4(x) = u_4 \, e^{-ip_4x} \tag{5.49}$$

Setzt man dies zusammen mit der Fourier-Darstellung des Propagators des Photons

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x-x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \; \tilde{D}^{\mu\nu}(q) \; e^{-iq(x-x')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \, \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} \; e^{-iq(x-x')} \end{aligned} \tag{5.50}$$

in die Gleichung für das Übergangsmatrixelement ein, so folgt

$$\begin{aligned} & -S_{fi}^{(1)} \\ = \; & iq_m \int d^4x \, \bar{\psi}_4(x) \, \gamma_\mu \, A^\mu(x) \, \psi_2(x) \\ = \; & \frac{iq_m}{(2\pi)^4} \int d^4x \, \bar{u}_4 \, e^{ip_4x} \, \gamma_\mu \int d^4x' \int d^4q \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} e^{-iq(x-x')} \\ & \qquad \left(q_e \bar{u}_3 e^{ip_3x'} \gamma_\nu u_1 e^{-ip_1x'}\right) \, u_2 e^{-ip_2x} \\ = \; & \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q \int d^4x \, e^{i(p_4-q-p_2)x} \int d^4x' \, e^{i(p_3+q-p_1)x'} \; q_m \, \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} q_e \, \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1 \\ = \; & i(2\pi)^4 \int d^4q \, \delta^4(p_4-q-p_2) \, \delta^4(p_3+q-p_1) \;\; q_m \, \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} \cdot q_e \, \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1 . \end{aligned}$$

Hierbei wurden die e-Funktionen so zusammengefasst, dass die Integrale über x, x' jeweils δ Funktionen ergeben. Da q der 4-er Impuls des Photons ist bedeutet die Integration über d^4q, dass alle möglichen Impulse des Photons berücksichtigt werden. Allerdings bedeuten die beiden δ-Funktionen, dass Energie und Impulserhaltung an jedem Vertex gilt, und damit auch für die Reaktion insgesamt,

$$\boxed{p_3 - p_1 + q = 0, \qquad p_4 - p_2 - q = 0, \qquad p_1 + p_2 = p_3 + p_4} \tag{5.51}$$

Daher kann der 4-er Impulsübertrag $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ nur einen Wert annehmen, so dass die Integration über d^4q das Resultat ergibt

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(1)} &= -i(2\pi)^4 \, \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ & \qquad \cdot q_m \, \bar{u}_4 \gamma_\mu u_2 \cdot \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} \cdot q_e \, \bar{u}_3 \gamma_\nu u_1 . \end{aligned} \tag{5.52}$$

Übergangsmatrixelement $S_{fi}^{(1)}$ und Matrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ hängen jetzt wie folgt zusammen:

$$\boxed{S_{fi}^{(1)} = -i\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\,\mathcal{M}_{fi}} \tag{5.53}$$

$$\boxed{-i\mathcal{M}_{fi} = iq_m\,\bar{u}_4\gamma_\mu u_2\;\cdot \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}\;\cdot iq_e\,\bar{u}_3\gamma_\nu u_1.} \tag{5.54}$$

5.5 Feynman-Regeln

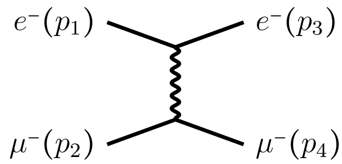

Abb. 5.4
$e^-\mu^-$ Streuung im t-Kanal

Der hier gewonnene Ausdruck des Matrixelements $\mathcal{M}_{fi}$ für den Prozess

$$e^-(p_1)\,\mu^-(p_2) \to e^-(p_3)\,\mu^-(p_4)$$

lässt sich graphisch als Feynman-Diagram darstellen. Offenbar entspricht jeder graphische Teil einem Ausdruck des Matrixelements. Andererseits kann man bereits an der Lagrange-Dichte die existierenden Teilchen und ihre Wechselwirkungen ablesen und so die erlaubten Feynmangraphen konstruieren. Jedem Feynman-Graph kann man dann mit folgenden Regeln ein Matrixelement zuschreiben, ohne die obige detailierte Rechnung durchführen zu müssen:

- Externe Fermion-Linien erhalten die entsprechenden Spinoren u ($\bar{v}$) für einlaufende und $\bar{u}$ (v) für auslaufende Teilchen (Antiteilchen).

- Für jeden Photon-Vertex führt man einen Vertexfaktor $iq_{el}\gamma^\mu$ zwischen den Spinoren ein, so dass sich ein Vektorstrom mit der elektrischen Ladung q_{el} ergibt, z.B. $iq_{el}\bar{u}\gamma^\mu u$. Die elektromagnetische Kopplung ist z.B. für ein Elektron die Elementarladung, $q = -e$, die mit der Feinstrukturkonstanten über

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx 1/137,036 \tag{5.55}$$

  zusammenhängt, so dass

$$e \approx 0,3 \tag{5.56}$$

  im hier verwendeten Einheitensystem.

- Interne Linien werden durch die entsprechenden Propagatoren ausgedrückt, also z.B. $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$ für ein Photon mit 4-er Impuls q.

- Es gilt 4-er Impulserhaltung an jedem Vertex.

- Matrixelemente mit identischen Anfangs- und Endzuständen müssen addiert werden.

- Bei Schleifen muß über alle möglichen Impulse der internen Linien integriert werden.

Externe Linien	
Spin-0	1
Spin-1/2 fermion (ein/auslaufend)	$u,\ \bar{u}$
Spin-1/2 antifermion (ein/auslaufend)	$\bar{v},\ v$
Spin-1 Photon (ein/auslaufend)	$\epsilon_\mu,\ \epsilon^*_\mu$
Interne Linien (Impuls q)	
Spin-0	$\frac{i}{q^2-m^2}$
Spin-1/2	$\frac{i\,(\gamma^\mu q_\mu+m)}{q^2-m^2}$
Spin-1, masselos	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$
Spin-1, Masse m	$\frac{-i\,(g_{\mu\nu}-q_\mu q_\nu/m^2)}{q^2-m^2}$
Vertex-Faktoren	
Photon – (Spin-0, Ladung q)	$-iq\,(p+p')^\mu$
Photon – (Spin-1/2, Ladung q)	$-iq\,\gamma^\mu$

Tabelle 5.1 Feynman-Regeln für das Matrixelement $-i\mathcal{M}$.
Schleifen: Integral $\int d^4k/(2\pi)^4$ über den Impuls k^μ in der Schleife, mit einem zusätzlichen Faktor -1 bei Fermionen.
Identische Fermion: Faktor -1 wenn sich Diagramme nur durch $e^- \leftrightarrow e^-$ unterscheiden.

Fälle mit anderen externen oder internen Teilchen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Die Faktoren $-1, i, ...,$ sind teilweise Konvention, aber bei Interferenzen und Diagrammen höherer Ordnung von Bedeutung.