

5 Feynman - Diagramme

5.1 Helizitätsamplituden

Einfache Abschätzungen von Wirkungsquerschnitten kann man bereits erhalten, wenn man nur die Erhaltung der Chiralität am Vertex beachtet. In Abschnitt 2.8 wurde gezeigt, dass sich der Strom der QED in rein linkshändige und rein rechtshändige Komponenten zerlegen lässt,

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_R\gamma^\mu u_R \quad (5.1)$$

Da Photonen nur an diesen Strom koppeln kann man daher auch Wirkungsquerschnitte in solche Faktoren zerlegen. Im ultrarelativistischen Limes, $E \gg m$, werden Chiralität und Helizität gleich,

$$u_L = u^{(2)} \quad u_R = u^{(1)} \quad (5.2)$$

so dass auch die Spin-Richtungen festliegen. Aus der Drehimpulserhaltung folgt dann die Winkelverteilung der Wirkungsquerschnitte.

Als Beispiel betrachten wir den Prozess

$$e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^-$$

im Schwerpunktsystem (CMS).

Für Drehimpulszustände $|j, m\rangle$ gilt allgemein

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle \quad (5.3)$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (5.4)$$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Im Anfangszustand ist mit der z-Achse entlang der e^- Richtung

$$e^- : |j_1, m_1\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \quad (5.5)$$

$$e^+ : |j_2, m_2\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (5.6)$$

für die gesamte z-Komponente also

$$m = m_1 + m_2 = 1.$$

Ebenso gilt für den Endzustand bezüglich der Achse z' des auslaufenden μ^-

$$m' = -1$$

Für den Streuwinkel Θ zwischen Anfangs- und Endzustand gilt nun:

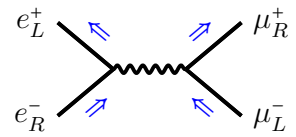


Abb. 5.1
Spinorientierung im Feynman-Diagramm.

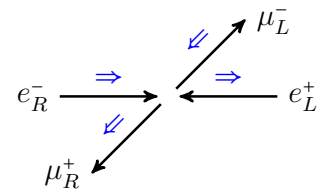


Abb. 5.2
Spinorientierung im CMS-System.

5.1 Helizitätsamplituden

- Für $\Theta = 0 \Rightarrow z \hat{=} z'$ ist die Drehimpulserhaltung für J_z verletzt, da $m \neq m'$. Der Prozess ist also verboten.
- Für $\Theta = \pi \Rightarrow z \hat{=} -z'$ ist der Drehimpuls erhalten, der Prozess daher erlaubt.

Der Winkel Θ ist also nicht beliebig. Die Wahrscheinlichkeit verschiedener Θ erhält man, wenn man das System des Anfangszustands in die Richtung des Endzustands dreht. Bei Rotation von $|j, m\rangle$ zum Beispiel um die y -Achse gilt

$$d_{mm'}^j(\Theta) := \langle j, m' | e^{-i\Theta J_y} | j, m \rangle \quad (5.7)$$

Für das Matrixelement M des Prozesses muß also gelten:

$$M \sim d_{mm'}^j \quad (5.8)$$

Die d -Funktionen sind nur vom Spin abhängig, gelten also für alle Prozesse mit gleicher Spin-Konfiguration. Mit der expliziten Form von $J_y = \frac{1}{2}\sigma_y$ folgt

$$d_{1-1}^1 = d_{-11}^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos\Theta) \approx -\frac{t}{s} \quad (5.9)$$

mit dem erwarteten Verhalten für $\Theta = 0$ oder π . Hier sind s, t, u Mandelstamm-Variablen. Bei Umkehrung der Spins im Endzustand

$$e_L^+ e_R^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^-$$

gilt

$$d_{11}^1 = d_{-1-1}^1 = \frac{1}{2}(1 + \cos\Theta) \approx -\frac{u}{s} \quad (5.10)$$

Für den unpolarisierten (L und R Zustände gleich häufig) Prozess

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

sind wegen Chiralitätserhaltung außer den genannten Amplituden nur noch

$$e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_L^+ \mu_R^- \quad (\approx d_{-11}^1) \quad (5.11)$$

$$e_R^+ e_L^- \rightarrow \mu_R^+ \mu_L^- \quad (\approx d_{-1-1}^1) \quad (5.12)$$

möglich. Addiert man alle Amplituden quadratisch auf, so erhält man

$$|\bar{M}|^2 \sim \left(-\frac{u}{s}\right)^2 + \left(-\frac{t}{s}\right)^2 = \frac{u^2 + t^2}{s^2} \quad (5.13)$$

Im ultrarelativistischen Limes ist dies bis auf die Normierung das gesamte Matrixelement für unpolarisierte Streuung und identisch mit dem Resultat einer vollständigen Berechnung über die Feynman-Regeln in niedrigster Ordnung. Diese Methode kann daher für Abschätzungen gut benutzt werden.

5.2 Propagatoren

5.2.1 Propagator für Fermionen

In der QED muss bei einem Streuprozess für ein Dirac-Teilchen die Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = q\gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) = V(x) \psi(x) \quad (5.14)$$

gelöst werden. Zur Bestimmung von $\psi(x)$ wird zunächst eine Lösung der Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) D(x - x') = \delta^4(x - x') \quad (5.15)$$

gesucht. Hier ist die Green'sche Funktion $D(x - x')$ die Lösung für $\psi(x)$ im Falle eines punktförmigen Potentials an der Stelle x' . Die allgemeine Lösung für beliebige Potentiale folgt dann aus

$$\psi(x) = \int d^4x' D(x - x') V(x') \psi(x') \quad (5.16)$$

wie man durch Einsetzen zeigen kann¹².

Da hier die rechte Seite auch von $\psi(x)$ abhängt ist die Lösung nicht einfach sondern muss durch Iteration (Störungsrechnung) bestimmt werden. Im Allgemeinen kann man damit jedoch nur Probleme lösen, bei denen die Störung klein ist.

Die Green'sche Funktion wird mittels einer Fourier-Transformation berechnet,

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \tilde{D}(p) \quad (5.17)$$

Setzt man dies in die Definitionsgleichung 5.15 für $D(x - x')$ ein, so erhält man wegen

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \tilde{D}(p) e^{-ip(x-x')} = \delta^4(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')}$$

für die Fourier-Transformierte

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \tilde{D}(p) = 1 \quad (5.18)$$

¹²Beachtet man, dass die Integration über x' läuft und die Ableitung ∂_μ bezüglich x ist, so kann man beide vertauschen:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \int d^4x' D(x - x') V(x') \psi(x') \\ &= \int d^4x' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) D(x - x') V(x') \psi(x') \\ &= \int d^4x' \delta^4(x - x') V(x') \psi(x') \\ &= V(x) \psi(x) \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von links mit $(\gamma^\nu p_\nu + m)$ erhält man wegen $\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu$ als Lösung

$$\boxed{\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2}} \quad (5.19)$$

Dieser Ausdruck hat Polstellen bei

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 = (p_0 - E_p)(p_0 + E_p) = 0,$$

(hier soll $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ sein), also dann, wenn das Dirac-Teilchen reell ist. Es wird daher ein kleiner Imaginärteil $i\epsilon$ hinzugefügt, um Integrationen über die Greensche Funktion zu erlauben,

$$\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \quad (5.20)$$

Am Ende einer Berechnung muss natürlich der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ verwendet werden. Diese Fourier-Transformierte der Green'schen Funktion ist der Propagator eines Dirac-Teilchens. Er gilt für alle Wechselwirkungen, nicht nur für die QED.

Die Rücktransformation zu $D(x - x')$ erfolgt durch Integration:

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-x')} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon} \quad (5.21)$$

Insbesondere findet man für die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen an verschiedenen Orten x und x' (siehe Anhang C):

$$\boxed{\psi(x) = i \int d\vec{x}' D(x - x') \gamma^0 \psi(x')} \quad (5.22)$$

und

$$\bar{\psi}(x') = i \int d\vec{x} \bar{\psi}(x) \gamma^0 D(x - x') \quad (5.23)$$

Aus Kausalitätsgründen gelten diese Gleichungen für $t > t'$.

5.2.2 Propagator für das Photon

Mit der Lorentz-Bedingung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ vereinfacht sich die Maxwell-Gleichung

$$\partial_\alpha F^{\alpha\nu} = j^\nu \quad (5.24)$$

zu

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\nu = j^\nu \quad (5.25)$$

Mit dem Ansatz für die Green'sche Funktion

$$\partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x - x') = g^{\mu\nu} \delta^4(x - x') \quad (5.26)$$

ergeben sich als Lösungen für A^μ ,

$$A^\mu(x) = \int d^4x' D^{\mu\nu}(x - x') j_\nu(x') \quad (5.27)$$

denn daraus folgt

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A^\mu(x) = \int d^4x' \partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x-x') j_\nu(x') = j^\mu(x)$$

Benutzt man die Fourier-Transformation

$$D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-x')} \quad (5.28)$$

so folgt aus

$$\partial^\alpha \partial_\alpha D^{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \tilde{D}^{\mu\nu}(q) (-q^2) e^{-iq(x-x')} = g^{\mu\nu} \delta^4(x-x')$$

und Vergleich mit der Exponentialdarstellung der δ -Funktion,

$$\boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}} \quad (5.29)$$

Dies ist der Propagator für das Photon.

5.2.3 Propagator für Spin-0 und Spin-1 Teilchen

Die bisher abgeleiteten Propagatoren für Spin-1/2 Teilchen und masselose Spin-1 Teilchen lassen sich auch direkt aus den Bewegungsgleichungen für freie Felder ablesen, wenn man den Impuls-Operator durch den Impuls ersetzt, $i\partial_\mu \rightarrow p_\mu$, und symbolisch schreibt: Dirac-Gleichung:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad (5.30)$$

$$\boxed{\tilde{D}(p) = \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}} \quad (5.31)$$

Klein-Gordon-Gleichung: Analog erhält man für den Propagator eines Spin-0 Teilchens

$$(-p^2 + m^2) \Phi = 0 \quad (5.32)$$

$$\boxed{\tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}} \quad (5.33)$$

Maxwell-Gleichung: Für ein Spin-1 Teilchen ohne Masse gilt

$$q^2 A^\nu = 0 \quad (q = \text{Impuls des } \gamma) \quad (5.34)$$

$$\boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}} \quad (5.35)$$

Proca-Gleichung: Für ein Spin-1 Teilchen mit Masse gilt die

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m^2) W^\mu - \partial^\mu \partial^\nu W_\nu = 0 \quad (5.36)$$

$$\boxed{\tilde{D}^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / m^2}{q^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (5.37)$$

5.3 Störungsrechnung

Aus der Beschreibung der Quanten-Feldtheorie für Fermionen und Bosonen hat R. Feynman einfache Regeln abgeleitet, die sich für die Berechnung von Teilchenprozessen aller Art anwenden lassen. Grundlage hierfür ist die Störungsrechnung, bei der jeder Prozess durch eine Entwicklungsreihe beschrieben wird, die jeweils durch einen Satz von Feynman-Diagrammen dargestellt werden können. Im Allgemeinen kann man damit jedoch nur Probleme lösen, bei denen die Störung klein ist.

Als Beispiel laufe ein Teilchen mit der Wellenfunktion ψ_i auf ein Streuzentrum zu. Die gestreute Wellenfunktion sei

$$\psi_s = S\psi_i$$

mit der Streumatrix S . Allgemein kann man ψ_s nach ebenen Wellen entwickeln. Für einen bestimmten Endzustand, d.h. eine bestimmte Wellenfunktion der auslaufenden Welle ψ_f , ist das Übergangsmatrixelement gegeben durch

$$S_{fi} = \langle \psi_f | \psi_s \rangle = \langle \psi_f | S | \psi_i \rangle \quad (5.38)$$

$$= \int d\vec{x} \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \quad (5.39)$$

wobei S als Streumatrix bezeichnet wird.

Anstelle der exakten Formel

$$\psi_s(x) = \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi_s(x') \quad (5.40)$$

mit dem Dirac-Propagator D muss eine Näherung verwendet werden. Sehr weit vor dem Streuzentrum sollte die einfallende Welle die Lösung der freien Dirac-Gleichung sein, $\psi_i(x)$. Man kann daher in erster Näherung für kleine Störungen unter dem Integral die einlaufende Welle ψ_i in das Integral zur Berechnung von $\psi_s(x)$ einsetzen:

$$\psi_s(x) \approx \psi^{(1)}(x) = \psi_i(x) + \text{Störung} \times \psi_i(x) \quad (5.41)$$

$$= \psi_i(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi_i(x') \quad (5.42)$$

und so weiter für höhere Ordnungen der Störungsrechnung. In nächster Näherung setzt man das Ergebnis $\psi^{(1)}$ als verbesserte Lösung in das Integral für $\psi^{(2)}$ ein:

$$\begin{aligned} \psi_s(x) \approx \psi^{(2)}(x) &= \psi_i(x) + \text{Störung} \times \psi^{(1)}(x) \\ &= \psi_i(x) + \text{Störung} \times \psi_i(x) + \text{Störung} \times \text{Störung} \times \psi_i(x) \\ &= \psi_i(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi^{(1)}(x') \\ &= \psi_i(x) + \int d^4x' D(x-x') V(x') \psi_i(x') \\ &\quad + \int d^4x' \int d^4x'' D(x-x') V(x') D(x'-x'') V(x'') \psi_i(x'') \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir nur die Näherung erster Ordnung (Born'sche Näherung), $\psi_s \approx \psi^{(1)}$. Damit findet man für das Übergangsmatrixelement:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \int d\vec{x} \psi_f^\dagger(x) \psi_s(x) \\
 &= \delta_{fi} + \int d^4x' \int d\vec{x} \psi_f^\dagger(x) D(x-x') V(x') \psi_i(x') \\
 &= \delta_{fi} + \int d^4x' \int d\vec{x} \bar{\psi}_f(x) \gamma^0 D(x-x') V(x') \psi_i(x') \\
 &= \delta_{fi} - i \int d^4x' \bar{\psi}_f(x') V(x') \psi_i(x')
 \end{aligned}$$

wobei $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ und im letzten Schritt eine Eigenschaft des Dirac-propagator benutzt wurde (s.o.). Im Falle der QED ist die Störung gegeben durch

$$V(x') \psi(x') = q \gamma^\mu A_\mu(x') \psi(x') \quad (5.43)$$

so dass

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int d^4x' q \bar{\psi}_f(x') \gamma^\mu \psi_i(x') A_\mu(x') \quad (5.44)$$

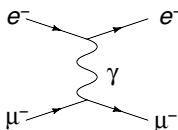
Der erste Term, δ_{fi} , entspricht dabei einer Welle, die nicht gestreut wurde, und ist daher nicht weiter von Interesse. Der zweite Term beinhaltet

$$j^\mu = q \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i \quad (5.45)$$

Diese Form eines Stroms, der im Gegensatz zur früher definierten Form zwei Wellen mit unterschiedlichen Impulsen kombiniert, ist im Folgenden das zentrale Element der Feynmanregeln für Fermionen.

5.4 Matrixelement

Wir betrachten die Streuung zweier Fermionen aneinander, wobei das Übergangsmatrixelement als Funktion der vorgegebenen Impulse der einlaufenden Teilchen (p_1, p_2) und der auslaufenden Teilchen (p_3, p_4) berechnet werden soll.

$$e^-(p_1) \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) \mu^-(p_4)$$


Die Übergangsmatrixelement in 1. Ordnung ergibt sich, wenn man das Photon-Feld berechnet, das aufgrund eines Stroms $j_\nu(x')$ entsteht, es zum Ort x propagiert und dort auf einen zweiten Strom $j_\mu(x)$ wirken lässt. Da die Ströme aus ausgedehnten Wellenfunktionen bestehen integriert man dabei über alle Orts-Zeit Koordinaten x und x' .