

## 4 Wirkungsquerschnitte

Die Beschreibung von Streuprozessen in der Teilchenphysik lässt sich charakterisieren durch:

- Die Kinematik der Teilchen im Anfangs- und Endzustand. Diese wird beschrieben durch die Mandelstam-Variablen.
- Die absolute Wahrscheinlichkeit des Prozesses als Funktion kinematischer Größen, d.h. den Wirkungsquerschnitt. Hierzu muss der Phasenraum der Reaktionsprodukte und das Matrixelement  $M$  berechnet werden. Letzteres wird näherungsweise durch Feynman-Diagramme berechnet.

Insbesondere für  $2 \rightarrow 2$  Reaktionen, bei denen die Massen aller vier Teilchen und die Schwerpunktsenergie bekannt sind, ist der einzige Freiheitsgrad der Reaktion der Streuwinkel  $\theta^*$  im Schwerpunktsystem (und ein willkürlicher Winkel um die Streuachse). Diese Winkelverteilung der Reaktionsprodukte im Schwerpunktsystem kann oft einfacher aus Argumenten zur Chiralitätserhaltung und Drehimpulserhaltung verstanden werden.

### 4.1 Mandelstam-Variablen

Wirkungsquerschnitte müssen Lorentz-invariant sein und von der Kinematik der ein- und auslaufenden Teilchen abhängen. Daher muß aus den 4-er Vektoren der Teilchen ein vollständiger Satz Lorentz-invarianter Skalarprodukte gebildet werden und nur von diesen darf der Wirkungsquerschnitt abhängen. Für  $2 \rightarrow 2$  Prozesse mit den vier 4-er Vektoren  $p_1, p_2, p_3, p_4$  gibt es insgesamt 10 Möglichkeiten für Skalarprodukte, wovon wegen Energie und Impulserhaltung

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (4.1)$$

aber nur sechs unabhängig sind. Dazu gehören die 4 Massen

$$p_i^2 = p_i^\mu p_{i,\mu} = m_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.2)$$

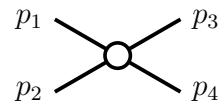
sowie zwei weitere unabhängige Kombinationen. Hierfür werden konventionell zwei der drei "Mandelstam-Variablen"

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (4.3)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \quad (4.4)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad (4.5)$$

verwendet. Offenbar ist  $\sqrt{s} = E_{CMS}$  die Schwerpunktsenergie, während  $t$  und  $u$  den 4-er Impulsübertrag zwischen ein- und auslaufenden Teilchen beschreiben.



**Abb. 4.1**

Bezeichnung der Impulse für einen beliebigen  $2 \rightarrow 2$  Prozess.

**Mandelstam-Variablen**

## 4.1 Mandelstam-Variablen

**Aufgabe 4.1:** Zeigen Sie, dass die drei Mandelstam-Variablen nicht unabhängig voneinander sind, sondern das gilt

$$s + t + u = \sum_{i=1, \dots, 4} m_i^2 \quad (4.6)$$

Es gilt weiterhin

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2 \approx 2p_1 p_2 \approx 2p_3 p_4 \quad (4.7)$$

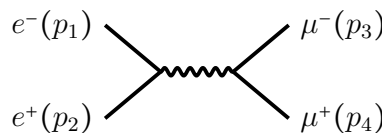
$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3 \approx -2p_1 p_3 \approx -2p_2 p_4 \quad (4.8)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 p_4 \approx -2p_1 p_4 \approx -2p_2 p_3 \quad (4.9)$$

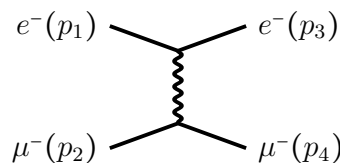
wobei die letzten beiden Spalten nur in ultra-relativistischer Näherung relevant sind ( $m_i^2 \ll s, t, u$ ). Insbesondere gelten die folgenden Näherungen im Schwerpunktsystem (CMS) beziehungsweise im "Fixed-Target" System (Teilchen 2 in Ruhe).

	CMS-System $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*$	Fixed Target $\vec{p}'_2 = 0$
$s \approx 2p_1 p_2 = 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2)$	$\approx 4E_1^* E_2^*$	$\approx 2m_2 E'_1$
$t \approx -2p_1 p_3 = -2(E_1 E_3 - \vec{p}_1 \vec{p}_3)$	$\approx -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta^*)$	$\approx -2m_2(E'_1 - E'_3)$
$u \approx -2p_1 p_4 = -2(E_1 E_4 - \vec{p}_1 \vec{p}_4)$	$\approx -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta^*)$	$\approx -2m_2 E'_3$

Bedeutsam sind die Mandelstam-Variablen auch, weil die (4er-Impulse)<sup>2</sup> der ausgetauschten Teilchen in Feynman-Diagrammen direkt mit  $s, t, u$  beschrieben und damit klassifiziert werden können (siehe auch Propagatoren).



**Abb. 4.2** s-Kanal Diagramm (Beispiel)



**Abb. 4.3** t-Kanal Diagramm (Beispiel)

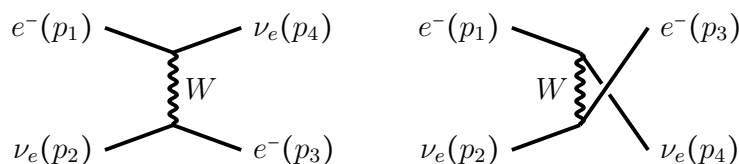


Abb. 4.4  $u$ -Kanal

Als Konvention werden die gleichartigen Teilchenpaare im Anfangszustand mit (1, 3) beziehungsweise (2, 4) bezeichnet. Der  $u$ -Kanal tritt in der QED nur auf, wenn bei gleichen Teilchen im Anfangs- und Endzustand (z.B.  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ ) nicht unterschieden werden kann, welches Teilchen von welchem Vertex stammt. In der schwachen Wechselwirkung können anders als in der QED auch Teilchensorten ineinander umgewandelt werden, so dass der  $u$  Kanal z.B. für  $\nu_e e^- \rightarrow e^- \nu_e$  bedeutsam ist.

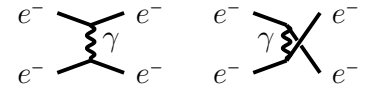


Abb. 4.5  $e^-e^-$  Streuung

## 4.2 Wirkungsquerschnitt und Luminosität

In einem Kollisionsexperiment ist die Anzahl  $N$  der Streueignisse, die gemessen werden kann, gegeben durch den Wirkungsquerschnitt und die integrierte Luminosität,

$$N = \sigma L_{int} \quad (4.10)$$

oder differentiell als Funktion einer Observablen  $X$ ,

$$\frac{dN}{dX} = \frac{d\sigma}{dX} L_{int} \quad (4.11)$$

Der Wirkungsquerschnitt charakterisiert dabei die Kollision zweier Teilchen, während die Luminosität beschreibt, wie viele Teilchen sich auf einer bestimmten Querschnittsfläche überhaupt begegnen. Beispielsweise ist die Luminosität eines Kreisbeschleunigers gegeben durch

$$L = N_B f \frac{N_1 N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \quad (4.12)$$

Hierbei sind  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  die Breiten der Verteilung der Teilchen transversal zur Strahlrichtung, die näherungsweise Gauß-Verteilungen sind. Die Anzahl der Teilchen je Bunch,  $N_{1,2}$ , multipliziert mit der Anzahl der Bunche,  $N_B$ , und der Umlauffrequenz der Bunche,  $f$ , ist der Strom eines der Teilchenstrahlen in der Maschine.

$$I_{1,2} = q N_{1,2} N_B f \quad (4.13)$$

Relevant für die Gesamt-Anzahl der Streu-Reaktionen ist das Produkt aus Luminosität und Laufzeit des Beschleunigers, oder bei nicht konstanter Luminosität, das Integral dieser Luminosität über die Zeit,

$$N = \sigma L_{int} = \sigma \cdot \int L dt \quad (4.14)$$

Die Luminosität hat Einheit  $cm^{-2}s^{-1}$ . Als Einheit der integrierten Luminosität ist  $barn^{-1}$  gebräuchlich, wobei

$$1barn = 1b = 10^{-28}m^2.$$

Heutige Beschleuniger produzieren integrierte Luminositäten pro Jahr im Bereich einiger  $fb^{-1} = 10^{15} b^{-1}$ .

$E_{CMS} =$	13 TeV
$N_B =$	2800
$f =$	11000 Hz
$N_{1,2} =$	$10^{11}$
$\sigma_{x,y} =$	11 $\mu m$
$L =$	$> 10^{34} / (cm^2 \cdot s)$

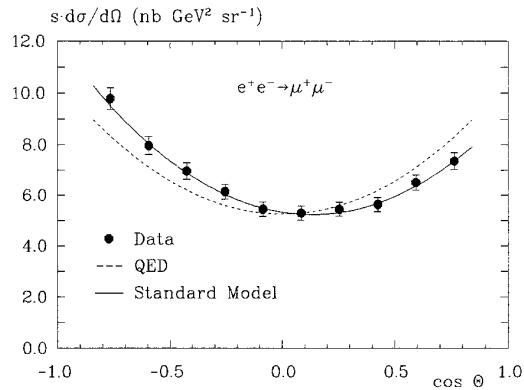
Abb. 4.6 LHC-Parameter von 2015

## 4.3 Messung von Wirkungsquerschnitten

Zur experimentellen Messung eines differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktion einer Observablen  $X$  aus der Formel

$$\frac{d\sigma}{dX} = \frac{1}{L_{int}} \frac{dN}{dX} \quad (4.15)$$

gehört neben der Luminosität also vor allem die Bestimmung der “wahren” Anzahl  $N$  der Ereignisse mit den gewünschten Eigenschaften als Funktion von  $X$ .



**Abb. 4.7** Differentieller Wirkungsquerschnitt  $s \cdot d\sigma/d\Omega$  für  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  als Funktion des Streuwinkels  $\theta^*$  bei  $\sqrt{s} = 35$  GeV. Daten der Jade Kollaboration am PETRA Beschleuniger (Z. Phys. C **46**, 547-553 (1990)).

Als Beispiel diene an einem  $e^+e^-$  Beschleuniger der Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\theta^*} \quad (4.16)$$

Für den angegebenen Prozess muß im Detektor nach Ereignissen mit zwei unterschiedlich geladenen Teilchen gesucht werden. Diese Teilchen müssen außerdem als Muonen identifiziert werden und damit von anderen Teilchensorten unterschieden werden können. Die Energien und Impulse der Muonen werden gemessen, um für jedes Ereignis den Winkel  $\theta^*$  bestimmen zu können. Wegen 4-er Impulserhaltung müssen die gemessenen Impulse im Rahmen ihrer Messfehler die Relation

$$p_{e^+} + p_{e^-} = p_{\mu^+} + p_{\mu^-}$$

erfüllen können.

Experimentell wird die Suche nach den Muonen und deren Identifikation mit einer Effizienz  $\epsilon$  erfolgen, die in einem guten Experiment nur etwas kleiner als 100% ist. Der Nachweis der Muonen kann insbesondere nicht erfolgen, wenn diese eine zu kleine Energie haben

oder z.B. bei zu kleinen Winkeln  $\theta$  zur Strahlrichtung im Strahlrohr bleiben und keine sensitiven Detektorelemente erreichen. Diese kinematische Akzeptanz  $a$  wird daher ebenfalls im Allgemeinen nicht bei 100% liegen. Die rekonstruierte Anzahl  $N_{rec}$  der Ereignisse ist daher nicht die wahre Anzahl der Ereignisse sondern

$$N_{rec} = \epsilon a N.$$

Weiterhin wird es andere Ereignisse geben, bei denen ebenfalls zwei Muonen entstehen<sup>9</sup>. Durch die Forderung nach 4er-Impulserhaltung für die Muonen (s.o.) lässt sich die Anzahl dieser Untergrundereignisse oft sehr stark reduzieren. Die verbleibende Anzahl  $N_{bkg}$  der Untergrund-Ereignisse muß subtrahiert werden, so dass

$$N = \frac{N_{rec} - N_{bkg}}{\epsilon a} \quad (4.17)$$

verwendet werden kann.

Für differentielle Wirkungsquerschnitte wird die Anzahl  $N_{rec,i}$  in einem kleinen Intervall der Breite  $\Delta X_i$  bestimmt und durch diese Breite geteilt. Für jedes Intervall  $i$  wird also

$$\left(\frac{d\sigma}{dX}\right)_i = \frac{1}{L_{int}} \frac{1}{\epsilon_i a_i} \cdot \frac{N_{i,rec} - N_{i,bkg}}{\Delta X_i} \quad (4.18)$$

verwendet. Die theoretische Vorhersage hierzu ist der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dX$ , der eine Funktion von  $X$  ist, integriert über das Intervall  $i$ ,

$$\left(\frac{d\sigma}{dX}\right)_i^{theo} = \frac{1}{\Delta X} \int_{X_i}^{X_{i+1}} \left(\frac{d\sigma}{dX}\right) dX \quad (4.19)$$

Im Prinzip sollte man das Intervall  $\Delta X_i$  möglichst klein machen. Dann wird allerdings die Anzahl der Ereignisse sehr klein und der relative statistische Fehler entsprechend groß. Zudem muß berücksichtigt werden, dass die Observable  $X$  einen Messfehler hat, so dass durch den Messvorgang ein Teil der Ereignisse im gewünschten Intervall tatsächlich in Nachbar-Intervalle migriert, und umgekehrt. Daher ist eine gute experimentelle Eichung und Auflösung wichtig. Um systematisch falsche Messungen zu vermeiden werden entsprechende Entfaltungskorrekturen durch Simulation von Ereignissen anhand von theoretischen Rechnungen und von Detektor-Modellen bestimmt.

<sup>9</sup> Ein Beispiel ist  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$  bei denen jedes  $\tau$  in ein Muon und zwei Neutrinos zerfällt.