4.4 Berechnung von Wirkungsquerschnitten

Bei Streuprozessen ist der Wirkungsquerschnitt ein Mass für die Wahrscheinlichkeit einer Streuung je einlaufendem Teilchenpaar an. Der WQ charakterisiert also die Reaktion der Teilchen und ist gleichzeitig unabhängig von der Anzahl der einlaufenden Teilchen, also Experiment-unabhängig.

Ein einzelnes Teilchen mit geometrischer Querschnittsfläche $\sigma = \pi r^2$ befinde sich in einer Ebene der Fläche A. Trifft ein anderes, viel kleineres Teilchen an einem beliebigen Ort auf die Fläche, so ist in der klassischen Physik die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Teilchen treffen, gleich

$$P_1 = \sigma / A.$$

Ist das eintreffende Teilchen ebenfalls ausgedehnt, so stellt σ die effektive Querschnittsfläche der Reaktion dar, eben den Wirkungsquerschnitt (WQ). In der quantenmechanischen Beschreibung sehr kleiner Elementarteilchen repräsentiert der WQ die effektive Querschnittsfläche oder (Reichweite)^2 der Wechselwirkung zwischen den Teilchen.

Trifft anstelle eines einzelnen Teilchens ein Teilchenstrahl mit kleiner Anzahl-Dichte n_1 und Geschwindigkeit v_1 auf die Fläche, so werden in einer Zeit T insgesamt

$$N_1 = n_1 \, v_1 \, T \, A$$

Teilchen die Fläche treffen. Für den Teilchenstrahl ist die Anzahl der Streuprozesse pro Zeit ("Übergangsrate") daher

$$\frac{P_S}{T} = \frac{P_1 \, N_1}{T} = \frac{\sigma \, n_1 \, v_1 \, T \, A}{A \, T} = \sigma n_1 \, v_1 .$$

Trifft der Teilchenstrahl nicht auf ein einzelnes Teilchen sondern auf N_2 Teilchen in einem Volumen V (Teilchendichte n_2), so ist die Anzahl der Streuprozesse um diesen Faktor N_2 erhöht,

$$\frac{P_S}{T} = \sigma n_1 \, v_1 N_2 = \sigma n_1 n_2 \, v_1 \, V \tag{4.20}$$

Für den allgemeinen Fall, dass sich auch die Teilchen N_2 bewegen, ist die Differenz der Geschwindigkeiten $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ maßgebend. Außerdem muss berücksichtigt werden, dass man experimentell bei einer $2 \to 2$ Reaktion ($p_1 + p_2 = p_3 + p_4$) die Teilchen im Endzustand im Impulsintervall $d^3p_3 \, d^3p_4$ beobachtet. Der Lorentz-invariante Phasenraumfaktor hierfür, d.h. die Anzahl der quantenmechanischen Zustände in diesem Bereich ist (siehe Abschnitt 4.4.1)

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4} \tag{4.21}$$

Damit ergibt sich insgesamt für den Wirkungsquerschnitt:

$$\boxed{d\sigma = \frac{P_S / (TV)}{n_1 \, n_2 \, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4}} \tag{4.22}$$

oder symbolisch

$$\boxed{d\sigma = \frac{\text{Übergangsrate x Phasenraum}}{\text{Teilchenfluss}}} \tag{4.23}$$

Dies ist Fermi's Goldene Regel.

- Der Phasenraum beinhaltet die Kinematik und ist proportional zur Anzahl der möglichen quantenmechanischen Endzustände.
- Der Flussfaktor dient der Normierung auf den Fluss der einlaufenden Teilchen. Bezogen auf ein Volumen V findet man allgemein (siehe Anhang 4.4.2)

$$F_V = n_1 n_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \frac{4}{V^2}\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{4.24}$$

- Die Übergangsrate beinhaltet das Matrix-Element und damit die Dynamik der Wechselwirkung. Für quantenmechanische Prozesse ist die Wahrscheinlichkeit P_S der Streuung in einen bestimmten Endzustand

$$|\langle f|\, S\, |i\rangle|^2 = |S_{fi}|^2 \tag{4.25}$$

Natürlich sollte diese Wahrscheinlichkeit null sein, wenn 4er-Impulserhaltung verletzt ist. S_{fi} enthält also implizit eine δ-Funktion, so dass man schreibt

$$S_{fi}^{(1)} = -i\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\,\mathcal{M}_{fi} \tag{4.26}$$

Später wird diese Form explizit abgeleitet. Dies ergibt[10]

$$\left(\delta^4(P)\right)^2 = \delta^4(P)\,\frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

Damit folgt

$$\boxed{|S_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\cdot VT} \tag{4.27}$$

[10] Bei der Berechnung von $|S_{fi}|^2$ wird demnach eine δ Funktion quadriert werden müssen. Hierfür gilt bei Integration $\delta^4(p)\,f(p) = \delta^4(p)\,f(0)$ und demnach auch $\delta^4(p)\,\delta^4(p) = \delta^4(p)\,\delta^4(0)$. Wegen

$$\delta^4(p) = \lim_{T,V\to\inf}\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int_T dt\int_V d^3x e^{-ipx}\right)$$

folgt

$$\delta^4(0) = \lim_{T,V\to\inf}\frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

Der Grenzwert für alle Zeiten und den ganzen Raum muss natürlich noch durchgeführt werden. Da jedoch sowohl V als auch T in der endgültigen Formel für den Wirkungsquerschnitt nicht mehr auftauchen ändert der Limes nichts am Endresultat für diese Berechnung und wird daher nicht weiter mitgeführt.

Der Wirkungsquerschnitt setzt sich für 2 → 2 Streuprozesse mit $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ also zusammen aus

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{P_S\,/\,(TV)}{n_1\, n_2\, |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4} \\ &= |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{V^4}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \end{aligned}$$

Die Spinoren in $\mathcal{M}_{fi}$ beinhalten noch die Normierung $\sqrt{(E+m)/V}$, so dass sich V heraushebt. Es wird daher ab jetzt $M_{fi} = \mathcal{M}_{fi} V^2$ verwendet, was so verstanden werden soll, dass bei der Berechnung von Matrixelementen M ab jetzt als Normierung der Spinoren $N = \sqrt{E+m}$ verwendet wird. Damit ist der Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2}{F} \cdot dQ} \tag{4.28}$$

oder explizit

$$\boxed{d\sigma = \underbrace{\frac{|M_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}}_{\text{einlaufender Teilchenfluss}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}}_{\text{Lorentz-invarianter Phasenraum (dLips = dQ)}}} \tag{4.29}$$

Dies ist die explizite Form von Fermi's goldener Regel für 2 → 2 Prozesse. Alle Teile sind explizit Lorentz-invariant.

4.4.1 Phasenraumfaktor

Der bereits in Gl. 4.21 verwendete Phasenraumfaktor soll im Folgenden begründet werden. Gesucht ist die Anzahl der quantenmechanisch erlaubten Zustände eines Teilchens in einem Würfel mit Volumen $V = L^3$. Die Anzahl der Teilchen im Würfel bleibt konstant, wenn periodische Randbedingungen für die Wellenfunktion und deren Ableitung vorliegen. In einer Dimension heist das

$$e^{-ip_x\, x} = e^{-ip_x\,(x+L)},$$

so dass $Lp_x = 2\pi n$, (mit $n = 1, 2..$). Damit gilt für die Anzahl der Zustände dn im Bereich von p_x bis $p_x + dp_x$

$$dn = dp_x \frac{L}{2\pi},$$

oder in 3 Dimensionen

$$dn = d^3 p \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

Bei $2E$ Teilchen im Volumen V ist damit die

$$\boxed{\text{Anzahl der Zustände / Teilchen} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{2E}} \tag{4.30}$$

Es soll nun noch gezeigt werden, dass der Ausdruck d^3p/E Lorentz-invariant ist. Bei einer Lorentz-Transformation z.B. in x-Richtung gilt,

$$p'_x = \gamma p_x - \gamma\beta E, \qquad E' = \gamma E - \gamma\beta p_x,$$

so dass

$$dp'_x = \frac{\partial p'_x}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial p'_x}{\partial E} dE = \gamma dp_x - \gamma\beta dE.$$

Außerdem folgt aus $p_x^2 = E^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2$ bei festgehaltenem p_y, p_z, dass $p_x\, dp_x = E\, dE$. Setzt man dies ein so folgt

$$dp'_x = (\gamma - \gamma\beta \frac{p_x}{E})\, dp_x$$

und damit

$$\frac{dp'_x}{E'} = \frac{(\gamma - \gamma\beta \frac{p_x}{E})\, dp_x}{\gamma E - \gamma\beta p_x} = \frac{dp_x}{E}.$$

Verallgemeinert für alle drei Impulsrichtungen ist also der Ausdruck

$$\frac{d^3p}{E} \tag{4.31}$$

für den Phasenraum Lorentz-invariant. Differentielle Wirkungsquerschnitte werden daher oft angegeben in der Form

$$E\,\frac{d\sigma}{d^3p}. \tag{4.32}$$

4.4.2 Teilchenfluss der einlaufenden Teilchen

Der Fluss der einfallenden Teilchen hängt von ihrer Dichte sowie ihrer Differenzgeschwindigkeit $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ ab, wobei angenommen ist, dass die Geschwindigkeiten entgegengesetzt gerichtet sind. Die Lösungen der Dirac-Gleichung werden so normiert ($N = \sqrt{(E+m)/V}$, siehe 2.4), dass die Teilchendichten

$$n = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = N^2\bar{u}u = 2E/V \tag{4.33}$$

betragen. Insgesamt ist damit der Fluss bezogen auf das Reaktionsvolumen V

$$\begin{aligned} F_V &= |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\,\frac{2E_1}{V}\,\frac{2E_2}{V} = (|v_1| + |v_2|)\, 2E_1\, 2E_2/V^2 \\ &= \left(\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\right) 2E_1\, 2E_2/V^2 = \frac{4}{V^2}\,(|\vec{p}_1|E_2 + |\vec{p}_2|E_1) \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{V^2\,F_V = 4\,\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} \tag{4.34}$$

wie man durch explizites Ausrechnen des 4-er Skalarprodukts p_1p_2 in der letzten Zeile zeigen kann. Der letzte Ausdruck für den Fluss ist explizit-Lorentz-invariant. Insbesondere gilt im CMS wegen $\vec{p}_i{}^* = \vec{p}_1{}^* = -\vec{p}_2{}^*$ auch

$$V^2F_V = 4|\vec{p}_i{}^*|\,(E_1^* + E_2^*) = 4|\vec{p}_i{}^*|\sqrt{s} \tag{4.35}$$

Im Fixed-Target-System gilt wegen $\vec{p}_2{}' = 0$ entsprechend

$$V^2F_V = 4m_2|\vec{p}_1{}'| = 2s \tag{4.36}$$

4.5 Wirkungsquerschnitt im CMS

Der Wirkungsquerschnitt ist augenscheinlich vielfach differentiell in $d^3\vec{p}_3$ und $d^3\vec{p}_4$. Er sollte aber nur von zwei dieser sechs Variablen abhängen, denn es gilt 4-er Impulserhaltung. Da die Energien der Teilchen durch die Anfangsbedingungen und die Massen festliegen, müssen die verbleibenden Variablen der Streuwinkel und der Azimuthalwinkel eines der Teilchen sein. Die Richtung des anderen Teilchens ergibt sich dann aus der Impulserhaltung. Das Matrixelement kann aus Symmetriegründen nicht vom Azimuthalwinkel um die Kollisionsachse abhängen. Es ist also $M_{fi} = M_{fi}(\theta^*)$. Da der Flussfaktor nicht von den auslaufenden Teilchen abhängt kann demnach der Phasenraum getrennt integriert werden, bis auf die Winkelvariablen. Dies ist besonders einfach im CMS System, da die δ- Funktion die 4-er Impulserhaltung garantiert. Man findet (siehe 4.5.1)

$$\boxed{dQ = \frac{1}{4(2\pi)^2}\,\frac{|\vec{p}_f{}^*|}{\sqrt{s}}\,d\Omega^*} \tag{4.37}$$

Hierbei ist das Raumwinkelelement

$$d\Omega^* = d\cos\theta^*\; d\phi^* \tag{4.38}$$

und $|\vec{p}_f{}^*|$ der Impuls der beiden Teilchen im Endzustand, so dass Energieerhaltung erfüllt ist, $\sqrt{s} = E_3^*(|\vec{p}_f{}^*|) + E_4^*(|\vec{p}_f{}^*|)$.

Im Schwerpunktsystem ergibt sich aus der goldenen Regel mit dem Flussfaktor (Gleichung 4.35)

$$F_V = 4|\vec{p}_i{}^*|\sqrt{s} \tag{4.39}$$

für den Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\,\frac{1}{s}\,\frac{|\vec{p}_f{}^*|}{|\vec{p}_i{}^*|}\,|M_{fi}(\theta^*)|^2} \tag{4.40}$$

- Aus dem Phasenraum folgt, dass σ proportional zum Impuls p_f der Teilchen im Endzustand ist. Die Produktion schwerer Teilchen ist also durch den Phasenraum unterdrückt.

- Bei hohen Energien werden die Massen der Teilchen zunehmend unwichtiger. In diesem Limes (oder bei gleichen Massen $m_i = m_f$) ist

$$\frac{|\vec{p}_f{}^*|}{|\vec{p}_i{}^*|} = 1 \tag{4.41}$$

  so dass der Wirkungsquerschnitt quadratisch mit der Schwerpunktsenergie fällt,

$$\sigma \sim \frac{1}{s} \tag{4.42}$$

  Da außer den Massen nur $\sqrt{s}$ die Dimension einer Energie trägt ist dies auch aus Dimensionsgründen erforderlich.

- Der Wirkungsquerschnitt hängt nur durch das Matrixelement vom Streuwinkel θ^* ab.

4.5.1 Integration des Phasenraums

Der Wirkungsquerschnitt ist augenscheinlich vielfach differentiell in $d^3\vec{p}_3$ und $d^3\vec{p}_4$. Er sollte aber nur von zwei dieser sechs Variablen abhängen, denn es gilt 4-er Impulserhaltung. Da die Energien der Teilchen durch die Anfangsbedingungen und die Massen festliegen, müssen die verbleibenden Variablen der Streuwinkel und der Azimuthalwinkel eines der Teilchen sein. Die Richtung des anderen Teilchens ergibt sich dann aus der Impulserhaltung. Das Matrixelement kann aus Symmetriegründen nicht vom Azimuthalwinkel um die Kollisionsachse abhängen. Es ist also $M_{fi} = M_{fi}(\theta)$. Da der Flussfaktor nicht von den auslaufenden Teilchen abhängt kann demnach der Phasenraum getrennt integriert werden, bis auf die Winkelvariablen. Dies ist besonders einfach im CMS System, da die δ- Funktion die 4-er Impulserhaltung garantiert. Im Schwerpunktssystem (CMS) gilt

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \qquad ; \qquad \sqrt{s} = E_1 + E_2$$

und

$$\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_4)) \; \delta^3(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4),$$

wobei explizit die Energien von den Impulsen abhängen,

$$E_3(p_3) = \sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2}, \qquad E_4(p_4) = \sqrt{\vec{p}_4^{\,2} + m_4^2}.$$

Integriert man zunächst über $d^3\vec{p}_4$ so gilt für den Phasenraum

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \; \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_4)) \; \delta^3(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3 \, d^3\vec{p}_4}{E_3(p_3) \, E_4(p_4)} \\ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_3)) \; \frac{d^3\vec{p}_3}{E_3(p_3) \, E_4(p_3)} \end{aligned}$$

Führt man die verbleibende Integration in Kugelkordinaten aus, $d^3\vec{p}_3 = \vec{p}_3^{\,2} \, dp_3 \, d\Omega$, so kann man die δ- Funktion nach ihrer Polstelle entwickeln[11] und erhält

$$\begin{aligned} dQ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \; \delta(\sqrt{s} - E_3(p_3) - E_4(p_3)) \; \frac{p_3^2 \, dp_3 \, d\Omega}{E_3(p_3) \, E_4(p_3)} \\ &= \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \; \frac{\delta(p_3 - p_f)}{|d(E_3(p_3) + E_4(p_3))/dp_3|} \; \frac{p_3^2 \, dp_3 \, d\Omega}{E_3(p_3) \, E_4(p_3)} \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \; \frac{1}{|p_f/E_3(p_f) + p_f/E_4(p_f)|} \; \frac{p_f^2 \, d\Omega}{E_3(p_f) \, E_4(p_f)} \\ dQ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \; \frac{p_f}{\sqrt{s}} \; d\Omega \end{aligned}$$

Hierbei ist p_f der Impuls der beiden Teilchen im Endzustand, so dass Energieerhaltung erfüllt ist, $\sqrt{s} = E_3(p_f) + E_4(p_f)$.

[11] Für die δ- Funktion gilt allgemein

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{i=1,n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

wobei $f'(x_i)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ an den Nullstellen x_i ist ($f(x_i) = 0$).