

Damit ergibt sich für den antisymmetrischen Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die homogenen Maxwell- Gleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

sind durch die Darstellung der Felder als Ableitungen des 4-er Potentials automatisch erfüllt. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ergeben sich aus der ersten Bewegungsgleichung zu $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ zu

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & \nu &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{j} & \nu &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Die zweite Bewegungsgleichung $(i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0$ gibt die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf das Dirac- Teilchen an. Ersetzt man den Impulsoperator $i\partial_\mu$ durch den Impuls p_μ so erkennt man den typischen Ausdruck $p - qA$ für die minimale Kopplung eines elektromagnetischen Feldes an ein Teilchen mit Impuls p .

Insgesamt folgern wir also aus der Lorentz-Invarianz der speziellen Relativitätstheorie und aus der globalen Phaseninvarianz der Quantenmechanik die Erhaltung einer Ladung und eines Teilchenstroms. Fordert man außerdem lokale Phaseninvarianz, so ergibt sich die Existenz eines Vektorfeldes, das masselos ist, Spin 1 hat und mit einer konstanten Ladung an den Vektorstrom des Teilchens koppelt. Man kann jedoch nicht die Existenz des geladenen Teilchens selber oder die Größe seiner elektrischen Ladung ableiten. Die Ladungen und die Massen der Fermionen sind demnach Naturkonstanten.

3.4 Magnetisches Moment

Aus der Bewegungsgleichung des Dirac-Teilchens in einem äußeren Feld

$$(i\gamma_\mu (\partial^\mu + iqA^\mu) - m) \psi = 0 \quad (3.23)$$

folgt für den Impulseigenwert P^μ

$$(\gamma_\mu (P^\mu - qA^\mu) - m) \psi = 0 \quad (3.24)$$

oder mit der Abkürzung $P'^\mu = P^\mu - qA^\mu$

$$(\gamma_\mu P'^\mu - m) \psi = 0 \quad (3.25)$$

3.4 Magnetisches Moment

Hieraus kann man explizit auch die Bewegungsgleichungen mit \vec{E} und \vec{B} Feld erhalten. Um vom Potential A^μ diese Felder zu erhalten muss man Ableiten. Am einfachsten wendet man direkt den Operator

$$(i\gamma_\nu(\partial^\nu + iqA^\nu) + m) \quad (3.26)$$

von links auf die Bewegungsgleichung an. Berücksichtigt man die Produktregel für den dann auftretenden Ausdruck $\partial^\nu(A^\mu \psi)$, so erhält man

$$(\gamma_\nu P'^\nu + m) (\gamma_\mu P'^\mu - m) \psi - iq\gamma_\nu\gamma_\mu (\partial^\nu A^\mu) \psi = 0 \quad (3.27)$$

Da für alle 4-er Vektoren $\gamma_\nu P'^\nu \gamma_\mu P'^\mu = P'_\mu P'^\mu$ ist, folgt

$$(P'_\mu P'^\mu - m^2) \psi = iq\gamma_\nu\gamma_\mu (\partial^\nu A^\mu) \psi \quad (3.28)$$

Mit $\gamma_\nu\gamma_\mu = \frac{1}{2}\{\gamma_\nu, \gamma_\mu\} + \frac{1}{2}[\gamma_\nu, \gamma_\mu] = g_{\nu\mu} + \frac{1}{2}[\gamma_\nu, \gamma_\mu]$ folgt für die rechte Seite⁸

$$\gamma_\nu\gamma_\mu (\partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2}[\gamma_\nu, \gamma_\mu] (\partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu A^\mu + 2i\vec{S}\vec{B} - i\gamma^0\vec{\gamma}\vec{E}$$

Für die linke Seite findet man

$$\begin{aligned} P'_\mu P'^\mu - m^2 &= (E - q\phi)^2 - (\vec{P} - q\vec{A})^2 - m^2 \\ &= (E_{kin} - q\phi)^2 + 2m(E_{kin} - q\phi) - (\vec{P} - q\vec{A})^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend folgt also

$$\begin{aligned} (E_{kin} - q\phi + \frac{(E_{kin} - q\phi)^2}{2m} - \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + \frac{q}{m}\vec{S}\vec{B} \\ - \frac{iq}{2m}\partial_\mu A^\mu - \frac{iq}{2m}\gamma^0\vec{\gamma}\vec{E})\psi = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

In einem Magnetfeld \vec{B} hat ein Dirac-Teilchen also einen Beitrag zu E proportional zum Spin. Klassisch ist dieser Beitrag durch das magnetische Moment gegeben, $W = -\vec{m}\vec{B}$. Das magnetische Moment ist also

$$\vec{m} = \frac{q}{m}\vec{S} \quad (3.30)$$

Im Vergleich dazu würde eine Ladung mit Bahndrehimpuls \vec{L} auf einer Kreisbahn ein magnetisches Moment von

$$\vec{m} = \pi r^2 \frac{qv}{2\pi r} \vec{n} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad (3.31)$$

erzeugen. Obwohl der Spin genau wie der Bahndrehimpuls zum Gesamtdrehimpuls beiträgt, trägt er also nach der Dirac-Gleichung ein doppelt so großes magnetisches Moment, ausgedrückt durch den g -Faktor,

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m} \vec{S} \quad \text{mit} \quad g = 2 \quad (3.32)$$

⁸ Dies folgt aus $\partial^i A^j - \partial^j A^i = F^{ij}$ und

$$[\gamma_i, \gamma_j] \partial^i A^j = - \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} \partial^i A^j = -2i \begin{pmatrix} \sigma_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} \epsilon_{ijk} \partial^i A^j = 4i\vec{S}\vec{B}$$

3.5 Experimentelle Tests der Dirac-Theorie

Die experimentelle Verifikation der Dirac-Gleichung und der Eichtheorie für den Elektromagnetismus betrifft unter anderem die folgenden Vorhersagen der Theorie:

- Antiteilchen und Teilchen haben die gleiche Masse: $m = \bar{m}$.
- Antiteilchen und Teilchen haben genau entgegengesetzt gleiche Ladungen: $q_e = -q_{\bar{e}}$.
- Das Photon hat Spin 1 und keine Masse: $m_\gamma = 0$.
- Das anomale Magnetische Moment eines Fermions ist $g = 2$.
- Elektromagnetismus ist die Kopplung eines Dirac-Vektorstroms an das Photonfeld: $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$

Die genauesten Tests ergeben sich bei gebundenen Systemen und bei Streuprozessen.

Positronen e^+ lassen sich recht einfach erzeugen, indem man Elektronen auf hohe Energien beschleunigt und auf Folien schickt. Durch Bremsstrahlung

$$e^- (+\text{Kern}) \rightarrow e^- \gamma (+\text{Kern})$$

entstehen hochenergetische Photonen, die anschließende Paarbildung erzeugt bei Photonenergien von mindestens $E_\gamma > 2m_e$ die Positronen,

$$\gamma (+\text{Kern}) \rightarrow e^+ e^- (+\text{Kern})$$

Die e^+e^- - Paare werden allerdings in der Regel nicht als gebundene Systeme erzeugt, sondern als freie Teilchen, mit sehr unterschiedlichen Energien. Um damit gezielt arbeiten zu können, müssen die Positronen also durch Beschleunigerkomponenten kollimiert und monochromatisiert werden.

Eine gute Alternative zur Erzeugung von Positronen sind β^+ -Zerfälle (z.B. ^{18}F). bei denen die Positronen mit sehr wenig Energie entstehen, so dass sie einfach zu beschleunigen sind.

Die Herstellung von Antiprotonen ist deutlich aufwendiger. In Proton-Nukleon-Stößen werden bei hohen Energien Quark-Antiquark-Paare erzeugt, aus denen in der Regel Mesonen entstehen. Etwa alle 10^{-6} Kollisionen bildet sich dabei aus drei Antiquarks ein Antiproton, $\bar{p} = (\bar{u}\bar{u}\bar{d})$. Am CERN werden Protonen aus dem PS-Beschleuniger (Vorbeschleuniger des LHC) benutzt, um Antiprotonen zu erzeugen. Diese werden dann im Antiproton-Decelerator (AD) durch elektromagnetische Felder und Streuung mit Elektronen kollimiert und bis auf $\approx 0,1c$ abgebremst.

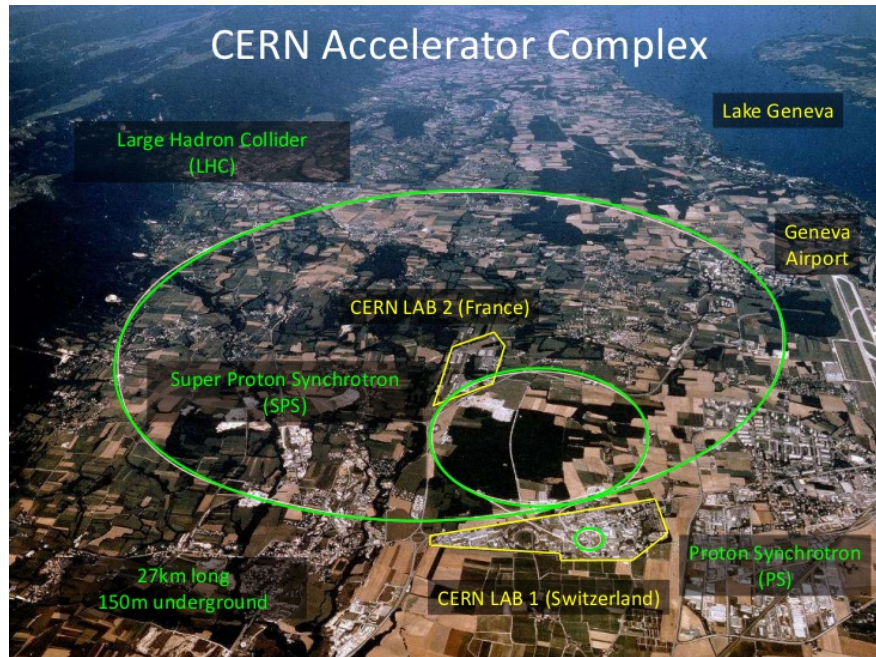


Abb. 3.3 CERN-Beschleunigerkomplex.

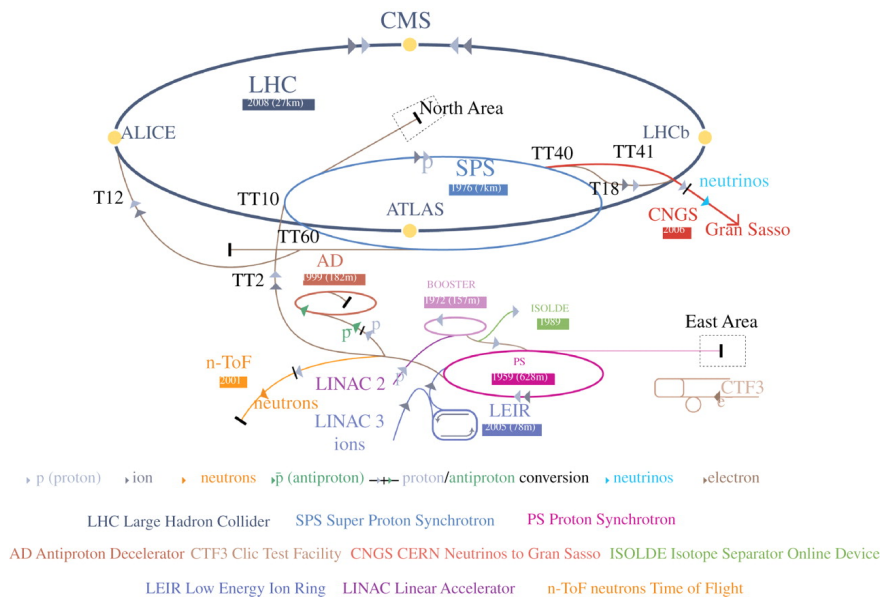


Abb. 3.4 CERN-Beschleunigerkomplex.jpg

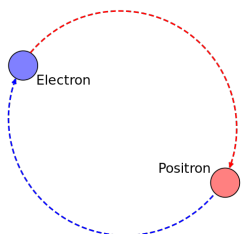


Abb. 3.5 Positronium

3.5.1 Gebundene Systeme

Gebundene Systeme aus Materie und Antimaterie sind zum Beispiel

- Positronium e^+e^- und Muonium μ^+e^-
- Antiwasserstoff $\bar{p}e^+$
- Antiprotonisches Helium: ${}^2_2\text{He} + \bar{p} + e^-$

Positronium

Als gebundenes System aus e^+ und e^- verhält sich Positronium wie Wasserstoff. Man unterscheidet para-Positronium (Spins antiparallel, 1S_0) mit einer Lebensdauer $\tau = 10^{-10}$ und ortho-Positronium (Spins parallel, 3S_0 mit $\tau = 10^{-7}$ s. Für die Energieniveaus des gebundenen Zustands muss allerdings mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_+ m_-}{m_+ + m_-} = m/2$ gerechnet werden. Der Effekt hierdurch ist natürlich viel größer als beim Wasserstoff. Durch sehr genaue Spektroskopie des Positroniums in einer Falle lassen sich die Energie-Abstände sehr genau vermessen, und unter der Annahme der elektromagnetischen Wechselwirkung auch für Antimaterie der Massenunterschied messen:

$$\frac{m_{e^+} - m_{e^-}}{(m_{e^+} + m_{e^-})/2} \leq 8 \cdot 10^{-9} \quad (3.33)$$

Bei Annahme der Gleichheit der Massen folgt daraus natürlich auch eine Einschränkung für den Unterschied der elektrischen Ladungen.

$$|q_{e^+} + q_{e^-}|/e \leq 4 \times 10^{-8}$$

Antiwasserstoff

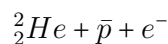
Am CERN AD Beschleuniger wird in einer Reihe von Experimenten versucht Antiwasserstoff herzustellen. Hierzu müssen sowohl Antiprotonen als auch Positronen in Penning-Fallen gespeichert und einander so nahe gebracht werden, dass sich tatsächlich gebundene Systeme bilden. Dies ist erstmals 2002 gelungen, allerdings erst bei hohen Temperaturen und in sehr hohen Anregungszuständen.

Erst 2010-11 konnten vom ALPHA-Experiment ca 300 Antiwasserstoff Atome für mehrere Minuten gespeichert werden. Nach dem Neustart der CERN Beschleuniger 2014 wurden 2015 die ersten Messungen der Hyperfeinstruktur des Grundzustands gemessen [arXiv:1504.05523]. Die Unterschiede der Aufspaltung relativ zu normalem Wasserstoff wurden zu kleiner als $4 \cdot 10^{-3}$ bestimmt. Tests besser als 10^{-7} sollten in Zukunft möglich sein.

Das ALPHA-Experiment hat ausserdem den Einfluss der Gravitation auf Antiprotonen untersucht, indem der Ort der $\bar{p}-p$ Vernichtung als Funktion der Zeit gemessen wurde. Der Unterschied zwischen schwerer und träger Masse wurde damit auf ca. $\pm 30\%$ eingeschränkt. [Nat. Commun. 4:1785 doi: 10.1038/ncomms2787 (2013)]

Antiprotonisches Helium

Ersetzt man bei Helium ein Elektron durch ein Antiproton, so ergibt sich ein Atom, das recht gut eingefangen werden kann (ASACUSA-Experiment),



Hiermit sollten ebenfalls Messungen der Hyperfeinstruktur Unterschiede zwischen Materie und Antimaterie messbar machen.

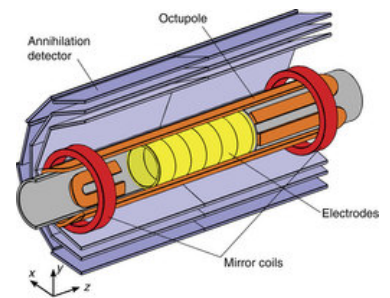


Abb. 3.6 Alpha-Detektor

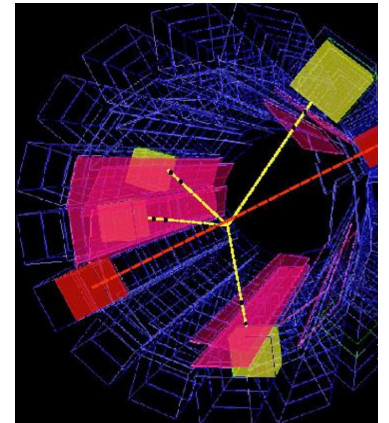


Abb. 3.7 Ereignis einer $\bar{p} - p$ Vernichtung im ALPHA-Detektor.

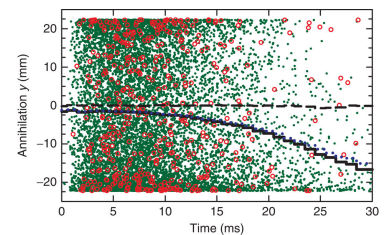


Abb. 3.8 Orte der Vernichtung von Antiprotonen im Alpha-Detektor.