In der schwachen Wechselwirkung, die die Parität verletzt, werden auch Axial-Vektoren eine große Rolle spielen, da der Strom eines linkshändigen Spin-1/2 Teilchens

$$\bar{u}_L \gamma^\mu u_L \sim \underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{V} - \underbrace{\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi}_{A} \tag{2.77}$$

also als Vektor - Axialvektor Strom (V-A Theorie der schwachen Wechselwirkung) ausgedrückt werden kann.

2.10 Normierung der Dirac-Spinoren

Gesucht wird eine Normierung der Dirac-Spinoren, die zu einer Lorentz-invarianten Lagrange-Dichte führt. Insbesondere muss sich der 4-er Strom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transformieren wie ein 4-er Vektor. Dies heist z.B., dass sich die 0-te Komponente

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

transformiert wie eine Energie, also proportional zur Energie E ist. Für den Spinor

$$\psi^{(1)}(p_z) = e^{ip_z z}\, u^{(1)}(p_z) = e^{ip_z z}\, N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt also z.B.

$$j^0 = N^* N \left(1,\ 0,\ \frac{p}{E+m},\ 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = |N|^2 \left(1 + \frac{p^2}{(E+m)^2}\right) = |N|^2 \frac{2E}{E+m}.$$

Daher setzt man die Normierung zu

$$N = \sqrt{E+m},$$

so dass die Teilchendichte

$$j^0 = \psi^\dagger\psi = 2E.$$

folgt.

Eine so normierte ebene Welle trägt allerdings unendlich viel Energie, denn $\int d^3x j^0 = \inf$. Bei der Herleitung von Wirkungsquerschnitten muss daher stattdessen die Teilchendichte in einem Volumen V betrachtet werden. Die Normierung ist dann

$$N = \sqrt{(E+m)/V},$$

so dass

$$j^0 = 2E/V.$$

Dieses Volumen kürzt sich bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten allerdings wieder heraus, so dass häufig dieses Volumen in den Gleichungen weggelassen oder als Einheitsvolumen aufgefasst und nicht explizit geschrieben wird.

Auch andere Konventionen für die Normierung sind gebräuchlich, unterscheiden sich von dieser aber nur um eine Konstante, die sich bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten ebenfalls wieder herauskürzt.

3 Elektromagnetismus

3.1 Lokale Eichinvarianz

Die Quanten-Elektro-Dynamik (QED) ist die bis jetzt gültige Theorie zur Beschreibung aller elektromagnetischen Prozesse. Theoretisch wird sie motiviert durch eine Verallgemeinerung der globalen Eichsymmetrie zu einer lokalen Eichsymmetrie.

Während die Schrödinger-Gleichung, die Klein-Gordon-Gleichung und die Dirac-Gleichung bereits invariant unter globalen Eichtransformationen sind (siehe Abschnitt 1.7), folgt aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz

- die Existenz von neuen Vektorfeldern (z.B. dem Photon)
- die Existenz von neuen Wechselwirkungen zwischen diesen Vektorfeldern und Teilchen mit Ladung.

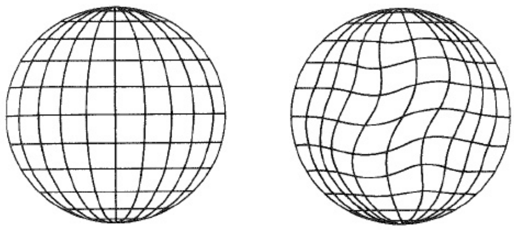

Abb. 3.1 Symbolische Darstellung einer Phasentransformation als Rotation einer Kugeloberfläche.
Links: Globale Transformation, entsprechend einer Rotation der ganzen Kugel um den gleichen Winkel, also keine Deformation.
Rechts: Lokale Transformation, entsprechend einer Verschiebung von Punkten untereinander mit Deformationen, die elastische Kräfte erzeugen.

Im Folgenden wird lokale Eichinvarianz für U(1) Phasentransformationen diskutiert.

Bei der globalen Eichinvarianz (Abschnitt 1.7) war die Phase α eine konstante, also unabhängig von Ort und Zeit. Observablen wie $< \Psi|\Psi >$ sind aber auch invariant unter lokalen Eichtransformationen, bei der die Phase von Ort und Zeit abhängt. Allgemein sollten physikalische Gesetze vermutlich nicht globalen Symmetrien unterliegen, da deren Transformationen überall gleichzeitig wirken müssten, was dem Prinzip der Kausalität wiederspricht. Es wird daher postuliert, dass die Eichsymmetrie $U(1)$ auch lokal gelten soll, d.h. eine kontinuierliche Funktion von Raum und Zeit sein kann:

Lokale Phasentransformation

$$\psi(x) \quad\rightarrow\quad \psi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\,\psi(x) \tag{3.1}$$
$$\bar{\psi}(x) \quad\rightarrow\quad \bar{\psi}'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\,\bar{\psi}(x). \tag{3.2}$$

Hier ist q eine zunächst beliebige, reelle Konstante und $\alpha(x) = \alpha(\vec{x}, t)$ eine reelle Funktion, d.h. die Phasen aller 4 Komponenten des Spinors Ψ werden um den gleichen Betrag verschoben. Diese Transformation soll Ort und Zeit nicht verändern, so dass $\partial'_\mu = \partial_\mu$. Für ein freies Spin 1/2 Teilchen ist damit die transformierte Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi' - m\bar{\psi}'\psi' \tag{3.3}$$

Der Massenterm ist offenbar eichinvariant,

$$m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}\psi, \tag{3.4}$$

während für die Ableitung

$$\partial_\mu \psi' = e^{iq\alpha(x)}\, (\partial_\mu \psi + iq\, \psi\, \partial_\mu \alpha(x)) \tag{3.5}$$

gilt. Damit gilt für die eich-transformierte Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\ &= e^{-iq\alpha(x)}\, \bar{\psi}\, i\gamma^\mu\, e^{iq\alpha(x)}\, (\partial_\mu \psi + iq\, \psi\, \partial_\mu \alpha(x)) - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi - m\bar{\psi}\psi - q\, \bar{\psi}\gamma^\mu \psi\, \partial_\mu \alpha(x) \\ &= \mathcal{L} - q\, \bar{\psi}\gamma^\mu \psi\, \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

Damit ist die Lagrange-Dichte eines freien Teilchens nicht invariant unter lokalen Eichtransformationen, da die Ableitung $\partial_\mu \psi$ nicht invariant ist.

kovariante Ableitung

Damit das Postulat der lokalen Eichinvarianz erfüllt wird, muss die Lagrange-Dichte offenbar verändert werden. Dies kann erreicht werden, wenn man anstelle der normalen Ableitung $\partial_\mu \psi$ eine "kovariante" Ableitung $D_\mu \psi$ einführt, die sich unter einer Eichtransformation verhalten soll wie:

$$\boxed{D_\mu \psi \quad \rightarrow \quad D'_\mu \psi' = e^{iq\alpha(x)} D_\mu \psi} \tag{3.6}$$

Dies kann nur erfüllt werden, wenn man ein neues Vektorfeld $A_\mu(x)$ einführt und die kovariante Ableitung definiert als

$$\boxed{D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x)},$$

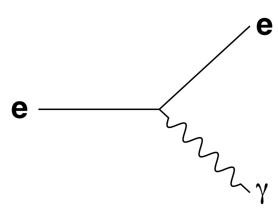

Abb. 3.2
Vertex für die Kopplung zwischen dem Strom $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ und dem Feld A_μ

wobei sich das Vektorfeld unter der gleichen Eichtransformation verhalten soll wie

$$\boxed{A_\mu \quad \rightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x)} \tag{3.7}$$

Damit ist die neue (noch nicht endgültige) Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\, i\gamma^\mu D_\mu\, \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{3.8}$$

$$= \underbrace{\bar{\psi}\, i\gamma^\mu \partial_\mu\, \psi}_{kin.Term} - \underbrace{m\bar{\psi}\psi}_{Massen-Term} - \underbrace{q\, \bar{\psi}\gamma^\mu\, \psi A_\mu}_{Neue\ Wechselwirkung} \tag{3.9}$$

Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz verlangt also ein neues Vektorfeld und sagt die Form der neuen Wechselwirkung zwischen Dirac-Teilchen und Vektorfeld voraus. Später werden wir für die QED identifizieren:

- das Vektorfeld A_μ entspricht dem Photon,
- das Dirac-Feld ψ entspricht z.B. einem Elektron (oder Myon, Tau, Quark),
- die Konstante q entspricht der Kopplung zwischen Photon und z.B. dem Elektron, d.h. der elektrischen Ladung. Diese ist z.B. für ein Elektron die Elementarladung, $q = -e$, die mit der Feinstrukturkonstanten über

  $$\boxed{\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137.036}} \tag{3.10}$$

  zusammenhängt, so dass im hier verwendeten Einheitensystem

  $$\boxed{e \approx 0,3} \tag{3.11}$$

Allerdings wird diese Interpretation der Ladung q aufgrund von Quantenkorrekturen durch die sogenannte Renormierung der Kopplungskonstanten nochmals verändert werden müssen (Renormierung).

Es muß noch bewiesen werden, dass die neue Lagrange-Dichte eichinvarinat ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi' &= \left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right)\psi' \\
&= \partial_\mu \left(e^{iq\alpha}\psi\right) + iq\left(A_\mu - \partial_\mu \alpha\right) e^{iq\alpha}\psi \\
&= e^{iq\alpha}\left(\partial_\mu \psi + iq\psi\partial_\mu\alpha + iqA_\mu\psi - iq\psi\partial_\mu\alpha\right) \\
&= e^{iq\alpha} D_\mu \psi
\end{aligned}$$

Damit ist auch $\bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi$ invariant, und damit auch die gesamte Lagrange-Dichte und die Bewegungsgleichungen.

3.2 Vektorfelder

3.2.1 Masse und kinetische Energie

Genau wie das Dirac-Feld $\psi(x)$ muss das Vektorfeld $A_\mu(x)$ als neuer Freiheitsgrad der Theorie aufgefasst werden, kann also auch Energie aufnehmen und sollte demnach mit Massenterm und kinetischem Term in der Lagrange-Dichte auftreten. Im Folgenden werden die Eigenschaften des freien Vektorfeldes untersucht.

Ein Massenterm der Form $m_A^2 A^\mu A_\mu$ ist nicht eich- invariant,

$$m_A^2 A'^\mu A'_\mu = m_A^2 \left(A^\mu A_\mu + 2A^\mu \partial_\mu \alpha + \partial^\mu \alpha \partial_\mu \alpha\right).$$

und verletzt damit das Postulat der Eichinvarianz. Daraus folgt:

- Das Vektorfeld muss masselos sein[6],

  $$\boxed{m_A = 0} \tag{3.12}$$

[6] In der Tat sind das Photon der $U(1)$ und die Gluonen der $SU(3)$ masselos. Die schwachen Eichbosonen $W^\pm, Z^0$ der $SU(2)$ erhalten jedoch durch die "spontane" Symmetriebrechung im Higgs-Mechanismus eine Masse.

Feldstärke-Tensor

Ein kinetischer Term für A_μ muss Ableitungen der Form $\partial^\mu A^\nu$ beinhalten, die einzeln nicht eichinvariant sind. Man muss daher Differenzen von Ableitungen betrachten. Für den sogenannten Feldstärke-Tensor

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \tag{3.13}$$

gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Eine Lorentz-invariante Lagrange-Dichte für das freie Vektorfeld ist demnach

$$\boxed{\mathcal{L}_\mathcal{A} = \mathcal{L}_\mathcal{A}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}. \tag{3.14}$$

Aus den Euler-Lagrange Gleichungen für jede einzelne Komponente des Feldes A_α,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\mathcal{A}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}_\mathcal{A}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = 0$$

folgt mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\mathcal{A}}{\partial A_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = \delta_{\beta\mu}\, \delta_{\alpha\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\partial^\mu A^\nu)}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = g^{\beta\mu}\, g^{\alpha\nu}$$

die Bewegungsgleichung für das freie Vektorfeld (Umbenennung der Indizes):

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \tag{3.15}$$

3.2.2 Spin und Polarisation

Wir betrachten ein freies Vektorfeld mit der Bewegungsgleichung 3.15. Durch eine Eichtransformation [7] lässt sich immer die Lorentz-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.16}$$

erfüllen. Für die Bewegungsgleichungen des freien Bosons

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

folgt damit die Wellengleichung

$$\Box A^\mu = 0$$

[7] Explizit muss gelten

$$\partial_\mu {A'}^\mu = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \alpha = 0$$

Daraus lässt sich α explizit berechnen.

mit ebenen Wellen als Lösung,

$$A^\mu = \varepsilon^\mu \cdot e^{-ip_\nu x^\nu}$$

Hier ist ε^μ der Polarisationsvektor. Mit $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt daraus

$$p_\mu \varepsilon^\mu = 0.$$

Die ursprünglich möglichen 4 Polarisationszustände ε^μ erfüllen also eine Zwangsbedingung, so dass durch die Eich-Freiheit de facto eine Komponente wegfällt. Die verbleibenden 3 Freiheitsgrade entsprechen den drei Einstellungen des Spins eines Spin-1 Teilchens.

Auch nach einer weiteren Eich-Transformation

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \alpha$$

bleibt die Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A'^\mu = 0$ erfüllt, falls $\Box\alpha = 0$. Für ein masseloses, reelles (d.h. nicht virtuelles) Teilchen ($p_\mu p^\mu = 0$) ist dies möglich, denn als Lösung kann

$$\alpha = iae^{-ip^\mu x_\mu}$$

gewählt werden, so dass gilt $\Box\alpha = \partial_\mu \partial^\mu \alpha = -p_\mu p^\mu \alpha = 0$. Aus diesen Lösungen ergibt sich mit $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \alpha$, dass

$$\varepsilon'^\mu = \varepsilon^\mu - ap^\mu$$

Wählt man nun a so, dass $\varepsilon^0 = 0$, so folgt mit $p_\nu \varepsilon^\nu = 0$, dass

$$\vec{p} \cdot \vec{\varepsilon} = 0,$$

d.h. der Polarisationsvektor steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Für masselose Vektorfelder ist also eine Polarisationsrichtung nicht realisiert; das Feld ist transversal polarisiert. Zeigt der Impuls in z Richtung, $\vec{p} = (0, 0, p_z)$, so ist der Polarisationsvektor eine Superposition der Basisvektoren

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)$$

Daraus lassen sich zirkular polarisierte Felder konstruieren, die den Spin-Einstellungen parallel (Helizität +1) und anti-parallel (Helizität -1) zur Bewegungsrichtung entsprechen,

$$\varepsilon^\mu(\lambda = +1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \tag{3.17}$$

$$\varepsilon^\mu(\lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \tag{3.18}$$

Insgesamt hat ein Eich-Vektorfeld also 3 Polarisationszustände, wobei allerdings bei masselosen (nicht virtuellen) Vektorfeldern nur zwei realisiert sind.

3.3 Maxwell-Gleichungen

Insgesamt ist die eichinvariante Lagrange-Dichte eines Dirac- Teilchens, einschließlich kinetischer Energie für das Vektorfeld,

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}\, i\gamma^{\mu} D_{\mu}\, \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \tag{3.19}$$

und damit

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{\bar{\psi}\, i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\, \psi}_{kin.\ Term\ \psi} - \underbrace{m\bar{\psi}\psi}_{Massen-Term} - \underbrace{q\, \bar{\psi}\gamma^{\mu}\, \psi A_{\mu}}_{Neue\ Wechselwirkung} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{kin.\ Term\ A_{\mu}}} \tag{3.20}$$

Aus den Euler-Lagrange Gleichungen für A_{μ} und $\bar{\psi}$ folgen die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi = j^{\nu}} \tag{3.21}$$

und

$$\boxed{i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} + iqA_{\mu}\right) - m)\psi = 0} \tag{3.22}$$

Hier erscheint jetzt die Stromdichte j^{ν} als Quelle für das Vektorfeld auf der rechten Seite, da im Gegensatz zur Lagrangedichte des freien Feldes (Abschnitt 3.2.1) die Ableitung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\alpha}} = q\, \bar{\psi}\gamma^{\alpha}\, \psi = j^{\alpha}$$

nicht verschwindet, sondern bis auf den Faktor q gerade die Stromdichte $j^{\nu} = \left(\rho, \vec{j}\right)$ des Dirac-Teilchens ist (siehe Abschnitt 1.7). Die hier beschriebene Lagrangedichte für eine lokale $U(1)$ Eichinvarianz ergibt daher Bewegungsgleichungen, die identisch denen der Elektrodynamik sind. Wir identifizieren daher die Stromdichte j^{ν} mit der elektrischen Stromdichte, die Konstante q mit der elektrischen Ladung des Dirac-Teilchens und das Feld A^{μ} mit dem 4-er Potential der Elektrodynamik,

$$A^{\mu} = \left(V, \vec{A}\right).$$

Das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ ergeben sich aus dem skalaren Potential V und dem Vektorpotential $\vec{A}$ durch

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V - \partial_t \vec{A} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned}$$

In 4-Vektor Notation, $\partial^{\mu} = (\partial_t, -\nabla)$, ist dies z.B. für $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} E^i &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ B^i &= \partial^k A^j - \partial^j A^k. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den antisymmetrischen Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Die homogenen Maxwell- Gleichungen

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$$

sind durch die Darstellung der Felder als Ableitungen des 4-er Potentials automatisch erfüllt. Die inhomogenen Maxwell-Geichungen ergeben sich aus der ersten Bewegungsgleichung zu $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ zu

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} = & \ \rho & \qquad \nu = 0 \\ \nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = & \ \vec{j} & \qquad \nu = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Die zweite Bewegungsgleichung $(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0$ gibt die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf das Dirac- Teilchen an. Ersetzt man den Impulsoperator $i\partial_\mu$ durch den Impuls p_μ so erkennt man den typischen Ausdruck $p - qA$ für die minimale Kopplung eines elektromagnetischen Feldes an ein Teilchen mit Impuls p.

Insgesamt folgern wir also aus der Lorentz-Invarianz der speziellen Relativitätstheorie und aus der globalen Phaseninvarianz der Quantenmechanik die Erhaltung einer Ladung und eines Teilchen-Stroms. Fordert man außerdem lokale Phaseninvarianz, so ergibt sich die Existenz eines Vektorfeldes, das masselos ist, Spin 1 hat und mit einer konstanten Ladung an den Vektorstrom des Teilchens koppelt. Man kann jedoch nicht die Existenz des geladenen Teilchens selber oder die Größe seiner elektrischen Ladung ableiten. Die Ladungen und die Massen der Fermionen sind demnach Naturkonstanten.