# 2 Eigenschaften der Dirac-Gleichung

## 2.1 Clifford-Algebra und Hamilton

In der Dirac-Gleichung

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0} \tag{2.1}$$

sind die 4 Komponenten von $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ zunächst unbekannte mathematische Objekte. Da die $i\partial_\mu$ aber Komponenten des Impulsoperators sind und Impuls und Masse die gleiche Dimension haben, können die $\gamma^\mu$ keine Dimension haben und müssen daher Konstanten sein. Im Folgenden soll gezeigt werden:

- Aus den vier Raum-Zeit-Dimensionen folgt, dass jede der $\gamma^\mu$ eine 4x4 Matrix und $\Psi$ ein 4-komponentiger "Spinor" ist.
- Die vier $\gamma^\mu$ können so bestimmt werden, dass jede der 4 Komponenten von $\Psi$ die relativistische Klein-Gordon Gleichung erfüllt.
- Die Gleichung beschreibt Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen
- Die Gleichung sagt Anti-Teilchen voraus.

**Forderung nach relativistischer Invarianz**

Die Dirac-Gleichung soll für ebene Wellen die relativistische Energie-Impulsbeziehung $E^2 - \vec{P}^2 - m^2 = 0$ erfüllen.

Wendet man $-(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$ von links auf die Dirac-Gleichung an, so erhält man

$$(\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu + m^2)\Psi = (\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\Psi = 0 \tag{2.2}$$

Vertauschung der Summationsindizes $\mu \leftrightarrow \nu$ ergibt $(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\Psi = 0$. Addiert man beide Gleichungen so erhält man

$$\left(\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\,\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\Psi = 0 \tag{2.3}$$

Dies ist genau dann die Klein-Gordon Gleichung $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Psi = 0$, wenn

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 2\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

**Clifford-Algebra**

ist, oder kurz

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \tag{2.5}$$

Diese Clifford-Algebra ist eine notwendige Bedingung für Lorentz-Invarianz. Aus ihr folgt insbesondere

$$(\gamma^0)^2 = 1, \qquad (\gamma^i)^2 = -1 \quad \text{für } i = 1,2,3 \tag{2.6}$$

Multipliziert man die Dirac-Gleichung $(i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m)\Psi = 0$ von links mit $\gamma^0$ und benutzt $(\gamma^0)^2 = 1$, so folgt

$$\boxed{H\Psi = i\partial_t\Psi = -i\gamma^0\vec{\gamma}\vec{\nabla}\Psi + m\gamma^0\Psi} \tag{2.7}$$

Der Hamiltonoperator der Dirac-Gleichung ist also

$$H = \gamma^0\vec{\gamma}\vec{P} + m\gamma^0 \tag{2.8}$$

## 2.2 Bestimmung der $\gamma$-Matrizen

Wegen den Antikommutator-Beziehungen in Gl. 2.5 sind die $\gamma^\mu$ keine einfachen Zahlen. Dirac hatte die Idee, vier verschiedene $n \times n$ Matrizen anzusetzen. Wiederum aus Gl. 2.5 folgt dann für die Spur (Tr)[2] und die Hermitezität[3] der Matrizen

$$Tr(\gamma^\mu) = 0 \qquad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \tag{2.9}$$

Man kann zeigen, dass für $n = 2,3,5,7,...$ keine Matrizen diese Kriterien erfüllen.

- $n = 2$: Die drei Pauli-Matrizen $\sigma_i$ bilden bereits einen vollständigen Satz von spurlosen, antikommutierenden $2\times 2$ Matrizen. Für $\gamma^i = \sigma^i$ müsste sich $\gamma^0$ damit als eine Linearkombination der Pauli-Matrizen und der $I_2$ ausdrücken lassen. Eine solche Matrix antikommutiert aber nicht mit den Pauli-Matrizen. Daher kann für $n = 2$ die Clifford-Algebra Gl. 2.5 nicht erfüllt sein.

- $n = 3,5,...$ (ungerade): Da $\gamma^0$ hermitesch und $(\gamma^0)^2 = 1$ ist, sind die Eigenwerte von $\gamma^0$ gleich $\pm 1$. Wegen $Tr(\gamma^0) = 0$ müssen gleich viele Eigenwerte mit $+1$ wie mit $-1$ auftreten, so dass nur eine gerade Anzahl von Eigenwerten möglich ist. Damit ist $n$ gerade.

[2] Für $\mu \neq 0$ gilt z.B. $\gamma^\mu\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^\mu$ und damit $\gamma^\mu = -\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ sowie $Tr(\gamma^\mu) = -Tr(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0) = -Tr(\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu) = -Tr(\gamma^\mu)$, so dass $Tr(\gamma^\mu) = 0$. Hier wurde benutzt, dass man die Reihenfolge der Matrizen unter einer Spur zyklisch vertauscht werden darf, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

[3] Da der Hamiltonoperator $H$ in Gl. 2.8 links hermitesch sein muss, sind auch die Matrizen rechts hermitesch, also $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger$ und $\gamma^0\gamma^i = (\gamma^0\gamma^i)^\dagger = (\gamma^i)^\dagger(\gamma^0)^\dagger$. Multipliziert man die letztere Gleichung von links mit $\gamma^0$ und benutzt $(\gamma^0)^2 = 1$, folgt außerdem $\gamma^i = \gamma^0(\gamma^i)^\dagger\gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger\gamma^0\gamma^0 = -(\gamma^i)^\dagger$.

Die kleinste mögliche Dimension der $\gamma$-Matrizen ist also 4×4. Damit ist die Dirac-Gleichung zu lesen als

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\, I_4)\Psi = 0_4 \tag{2.10}$$

Hier ist $\Psi$ ein vier-komponentiger Spinor,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Jede der Komponenten von $\Psi$ erfüllt getrennt die Klein-Gordon Gleichung. Für eine ebene Welle

$$\Psi = \Psi_0\, e^{-ipx} \tag{2.12}$$

erfüllt jede Komponente die Gleichung $E^2 - \vec{P}^2 - m^2 = 0$.

Eine der möglichen expliziten Darstellungen der $\gamma$-Matrizen, die die Clifford-Algebra erfüllt, ist die Pauli-Dirac Form,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Man benutzt aber meistens die standard Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

um die $4 \times 4$ Matrizen in etwas übersichtlicherer $2 \times 2$ Form zu schreiben:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3 \tag{2.16}$$

Hier ist $I$ die $2 \times 2$ Einheitsmatrix.

## 2.3 Lösungen der Dirac Gleichung

Lösungen der freien Dirac- Gleichungen

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi = 0$$

sind vier Wellenfunktionen

$$\psi(x) = u^{(1,2)}(p)\, e^{-ip^\mu x_\mu} \tag{2.17}$$

$$\psi(x) = v^{(1,2)}(p)\, e^{+ip^\mu x_\mu} \tag{2.18}$$

wobei die jeweils zwei Spinoren für Teilchen $u^{(1,2)}(p)$ und Antiteilchen $v^{(1,2)}(p)$ nur vom 4-er Impuls $p_\mu$ abhängen, aber nicht von den Ortskoordinaten $x_\mu$. Einsetzen in die Dirac-Gleichung ergibt Gleichungen für die Spinoren,

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u^{(1,2)} = 0 \tag{2.19}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\, v^{(1,2)} = 0 \tag{2.20}$$

sowie

$$\bar{u}^{(1,2)}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \tag{2.21}$$

$$\bar{v}^{(1,2)}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0. \tag{2.22}$$

In der Dirac- Pauli Darstellung der $\gamma$- Matrizen ist

$$\gamma^\mu p_\mu - m = \begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

wobei auf den Diagonalen jeweils eine 2x2 1er Matrix nicht ausgeschrieben wurde. $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ ist immer positiv. Es gilt

$$\vec{\sigma}\vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}, \qquad (\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2 \tag{2.24}$$

Lösungen für die Spinoren der Teilchen ($u$) und Antiteilchen ($v$) sind daher

$$u^{(1,2)}(p) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\,\chi^{(1,2)} \end{pmatrix}, \qquad v^{(1,2)}(p) = \pm N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\,\chi^{(2,1)} \\ \chi^{(2,1)} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

wobei in der letzten Spalte die zwei-komponentigen Spinoren

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

nur zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt wurden. Explizit ausgeschrieben lauten die Spinoren

$$u^{(1)}(p) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u^{(2)}(p) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

$$v^{(1)}(p) = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)}(p) = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Die willkürliche Normierung wird zumeist zu $N = \sqrt{E+m}$ gesetzt. Bewegt sich das Teilchen nur in $+z$ Richtung, so lauten die Spinoren

$$u^{(1)}(p_z) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^{(2)}(p_z) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E+m} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

$$v^{(1)}(p_z) = N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^{(2)}(p_z) = -N \begin{pmatrix} \frac{p}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Im Ruhesystem des Teilchens ist $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ und die Spinoren lauten

$$u^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

$$v^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(0) = -\sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

## 2.4 Interpretation der Lösungen

Wir betrachten die Dirac-Gleichung in der Form von Gl. 2.7,

$$H\Psi = i\partial_t \Psi = -i\gamma^0 \vec{\gamma} \vec{\nabla} \Psi + m\gamma^0 \Psi \tag{2.33}$$

In Matrixschreibweise lautet sie

$$\begin{pmatrix} i\partial_t & \\ & i\partial_t \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma}\vec{P} \\ \vec{\sigma}\vec{P} & \end{pmatrix} \Psi + \begin{pmatrix} m & \\ & -m \end{pmatrix} \Psi \tag{2.34}$$

Für ein freies Teilchen wird eine ebene Welle

$$\Psi = u(E, \vec{P}) e^{-i(Et - \vec{P}\vec{x})} \tag{2.35}$$

als Lösung erwartet. Betrachtet wird zunächst ein Teilchen in seinem eigenen Ruhesystem, d.h. $\vec{P} = 0$. Eine Lösung der Dirac-Gleichung ist zum Beispiel (bis auf eine beliebige Normierung)

$$\Psi^{(1)} = u^{(1)}\, e^{-imt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \tag{2.36}$$

denn $i\partial_t\Psi^{(1)} = H\Psi^{(1)} = m\Psi^{(1)}$. Der Hamiltonoperator hat also als Eigenwert die Masse, wie erwartet für ein ruhendes Teilchen. Das gleiche gilt für die 2. Lösung $u^{(2)} = (0,1,0,0)^T$.

Für $u^{(3)} = (0,0,1,0)^T$ und $u^{(4)} = (0,0,0,1)^T$ würde jedoch das Vorzeichen der Masse in Gl. 2.34 zu negativen Eigenwerten des Hamiltonoperators führen, $i\partial_t\Psi^{(3)} = H\Psi^{(3)} = -m\Psi^{(3)}$ und kann daher so nicht direkt interpretiert werden. Eine Lösung hierzu findet man, wenn man die Dirac-Gleichung komplex konjugiert, so dass $i\partial_t$ und $P = -i\nabla$ sowie $\gamma^2$ ihr Vorzeichen relativ zum Massenterm ändern. Um zu verhindern, dass $\gamma^2$ und damit die Impulskomponente $P_2$ eine Sonderrolle einnehmen, muss anschliessend von links mit $\gamma^2$ multipliziert werden, und dann $\gamma^2$ nach rechts durchgeschoben werden.

---

**Aufgabe 2.1:** Zeigen Sie, dass

$$\Psi_c = i\gamma^2\Psi^* \tag{2.37}$$

die standard Form der Dirac-Gleichung erfüllt:

$$i\partial_t\Psi_c = -i\gamma^0\vec{\gamma}\nabla\,\Psi_c + m\gamma^0\Psi_c \tag{2.38}$$

Beachten Sie dabei die Antikommutator-Relation der $\gamma$-Matrizen ($\gamma^2\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^2$ für $\mu \neq 2$).

---

Die beiden Komponenten $\Psi_c^{(1,2)}$ erfüllen also ebenso wie $\Psi^{(1,2)}$ die Bedingung $E = m$ für ($\vec{P} = 0$). Nun ist aber

$$\Psi_c^{(1)} = i\gamma^2(\Psi^{(1)})^* = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} e^{-ipx}\right)^* = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} e^{ipx} \tag{2.39}$$

Ebenso gilt

$$\Psi_c^{(2)} = -\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} e^{ipx} \tag{2.40}$$

Dies begründet die Einführung der Spinoren $v$,

$$\Psi_c^{(1)} = v^{(1)}e^{ipx} \qquad \Psi_c^{(2)} = v^{(2)}e^{ipx} \tag{2.41}$$

Zusammenfassend gibt es also die vier physikalisch interpretierbaren Lösungen $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi_c^{(1)}, \Psi_c^{(2)}$.

Der Unterschied der Lösungen $\Psi$ und $\Psi_c$ ergibt sich, wenn man die Dirac-Gleichung einschliesslich Elektromagnetismus (oder jeder anderen Eichwechselwirkung) untersucht. Später werden wir mit Hilfe der Eichtheorien die sogenannte minimale Kopplung ableiten, bei der der Impulsoperator ersetzt wird durch

$$p^\mu = i\partial^\mu \quad \to \quad p^\mu - qA^\mu = i(\partial^\mu + iqA^\mu) \tag{2.42}$$

Damit ergibt sich die Dirac-Gleichung mit Wechselwirkung,

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m]\ \Psi = 0 \tag{2.43}$$

Hierfür erzeugt komplex konjugieren und mit $\gamma^2$ multiplizieren ein relatives Minuszeichen zwischen $\partial_\mu$ und $iqA_mu$. Daher lautet die resultierende Gleichung für $\Psi_c$

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\ \Psi_c = 0 \tag{2.44}$$

**Anti-Teilchen**

Die Bewegungsgleichung für die Lösungen $\Psi$ und $\Psi_c$ unterscheiden sich also gerade um das Vorzeichen des Terms mit der Ladung $q$. Dies gilt für alle Ladungen aller Eichwechselwirkungen. Daher werden die Lösungen $\Psi$ als Felder der Teilchen und die Lösungen $\Psi_c$ als Felder der zugehörigen Antiteilchen bezeichnet. Teilchen und zugehörige Antiteilchen haben die gleiche Masse $m$.

## 2.5 Drehimpuls und Spin

Für ein abgeschlossenes System wie ein einzelnes Dirac-Teilchen muss der Gesamtdrehimpuls erhalten sein und daher mit dem Hamilton-Operator

$$H = \gamma^0\gamma^i P^i + m\gamma^0 \tag{2.45}$$

aus Gl. 2.8 kommutieren. Für den Operator des Bahn-Drehimpulses definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{2.46}$$

findet man jedoch[4]

$$\begin{aligned} [H, \vec{L}] &= \gamma^0\gamma^i[P^i, \vec{r} \times \vec{P}] + m[\gamma^0, \vec{r} \times \vec{P}] && (2.48) \\ &= -i\gamma^0\vec{\gamma} \times \vec{P} && (2.49) \end{aligned}$$

Es muss also außer dem Bahndrehimpuls einen weiteren Beitrag zum Gesamtdrehimpuls geben, der Eigendrehimpuls oder *Spin* $\vec{S}$ genannt wird. Einen ganz ähnlichen Ausdruck wie für $[H, L_i]$ findet man für eine Matrix, die nicht vom Impuls oder Bahndrehimpuls abhängt und daher ein Eigendrehimpuls sein kann,

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \\ & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

[4]Die $\gamma$-Matrizen wirken im Spinorraum, der nichts mit dem Orts- oder Impulsvektorraum zu tun hat. Sie kommutieren daher mit den Operatoren $\vec{r}$ und $\vec{P}$. Daher ist z.B.

$$[\gamma^0\gamma^i P^i, \vec{r} \times \vec{P}] = \gamma^0\gamma^i\,[P^i, \vec{r} \times \vec{P}] \tag{2.47}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \gamma^i[P^i, \epsilon_{klm}x^l P^m] &= \gamma^i\epsilon_{klm}\left(x^l[P^i, P^m] + [P^i, x^l]P^m\right) \\ &= -i\gamma^i\epsilon_{klm}\delta_{il}P^m = -i\vec{\gamma} \times \vec{P} \end{aligned}$$

denn[5]

$$[H, \vec{\Sigma}] = 2i\gamma^0 \vec{\gamma} \times \vec{P} \tag{2.52}$$

Damit der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}} \tag{2.53}$$

mit dem Hamilton-Operator kommutiert, $[H, \vec{J}] = 0$, muss der Spin-Operator festgelegt werden zu

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}} \tag{2.54}$$

Im Ruhesystem des Teilchens ($\vec{P} = 0$) ergibt sich der Spin der Lösung $u^{(1)}$ entlang der $z$-Achse zu

$$S_z u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{pmatrix} u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}u^{(1)}$$

Daher beschreibt die Dirac-Gleichung Spin 1/2 Teilchen. **Spin $\pm\frac{1}{2}$**

## 2.6 Helizität

Angewendet auf die Spinoren $u(p)$, $v(p)$ zeigt sich, dass diese im Allgemeinen keine Eigenzustände des Spin-Operators sind. Für Teilchen, die sich in $+z$- Richtung bewegen, sind die Spinoren $u(p_z), v(p_z)$ jedoch Eigenzustände von $S_z$. Es wird daher der Helizitätsoperator definiert,

$$\lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2|\vec{p}|}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

der die Spin-Komponente parallel zum Impuls $\vec{p}$ beschreibt.

Insbesondere ist für ein Teilchen mit Impuls in $+z$ Richtung der Helizitätsoperator einfach

$$\lambda_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

so dass

$$\lambda_z u^{(1)}(p_z) = +\frac{1}{2}u^{(1)}(p_z) \qquad \lambda_z u^{(2)}(p_z) = -\frac{1}{2}u^{(2)}(p_z) \tag{2.57}$$

[5] $[H, \vec{\Sigma}]$ beinhaltet Ausdrücke wie $[\gamma^0\gamma^i P^i, \Sigma_j]$. Gleichung 2.52 folgt daher aus

$$[\gamma^0\gamma^i, \Sigma_j] = \left[\begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & \\ & \sigma_j \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} & \sigma_k \\ \sigma_k & \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk}\gamma^0\gamma^k \tag{2.51}$$

Für ein Antiteilchen gilt:

$$\lambda_z v^{(1)}(p_z) = -\frac{1}{2} v^{(1)}(p_z) \qquad \lambda_z v^{(2)}(p_z) = +\frac{1}{2} v^{(2)}(p_z) \tag{2.58}$$

Die Spinoren $u^{(1,2)}$ sind also Eigenfunktionen des Helizitätsoperators mit positiver Helizität 1/2 wenn der Spin in Bewegungsrichtung zeigt. Helizität ist bedeutsam, weil der Spin zur Drehimpulserhaltung beiträgt.

## 2.7 Chiralität

Es werden zwei Chiralitäts - Projektionsoperatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \tag{2.59}$$

definiert. Nach Anwendung auf beliebige Spinoren entstehen

$$u_L(p) = P_L u(p) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)u(p) \tag{2.60}$$

$$u_R(p) = P_R u(p) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)u(p) \tag{2.61}$$

linkshändige ("lefthanded") Spinoren $u_L$ und rechtshändige ("righthanded") Spinoren $u_R$, so dass

$$u = u_L + u_R \tag{2.62}$$

Explizit ist

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\gamma^5\right)^2 = 1 \tag{2.63}$$

Wendet man die Chiralitätsoperatoren auf Helizitätszustände an, so findet man

$$P_L u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\, u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}\sqrt{E+m}\,(1-\frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$P_R u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\, u^{(1)}(p_z) = \frac{1}{2}\sqrt{E+m}\,(1+\frac{p}{E+m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall, $E >> m$, $E \approx p$, ist $P_L u^{(1)} \to 0$ und $P_R u^{(1)} \to u^{(1)}$, d.h. Teilchen mit positiver Helizität sind nahezu rechtshändig und Teilchen mit negativer Helizität sind nahezu linkshändig. Dies ist aber falsch bei kleineren Geschwindigkeiten.

Chiralität (oder Händigkeit) spielt eine große Rolle, weil sie für Vektorströme an jedem Vertex eines Feynman-Diagrams erhalten bleibt. Für den Strom

$$j^\mu = \bar{u}\gamma^\mu u \tag{2.66}$$

in der QED gilt mit $u = u_L + u_R$ und $\bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R$, dass

$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_L\gamma^\mu u_L + \bar{u}_R\gamma^\mu u_R. \tag{2.67}$$

Da der Strom in der QED insgesamt erhalten bleibt und keine gemischten Terme $\bar{u}_R\gamma^\mu u_L$ auftreten bedeutet dies, dass ein in einen Prozess einlaufendes linkshändiges Teilchen auch linkshändig die Reaktion verlässt, und ebenso für ein rechtshändiges Teilchen. Dies stellt eine wichtige Einschränkung für die erlaubten Helizitäts- Kombinationen in Prozessen dar. In der QCD und der schwachen Wechselwirkung gilt dies ebenso. Da die Chiralität für ultrarelativistische Teilchen auch die Helizität und damit den Spin festlegt, folgen hieraus bereits Grundeigenschaften der Wirkungsquerschnitte.

## 2.8 C,P,T

Für den Operator der Ladungskonjugation $C$ gilt

$$C\psi = \psi^C = i\gamma_2\psi^*, \tag{2.68}$$

so dass gilt:

$$Cu^{(1)} = u^{(1)C} = v^{(2)}, \qquad Cu^{(2)} = u^{(1)C} = v^{(1)}. \tag{2.69}$$

Die Paritätsoperator bewirkt eine Spiegelung der Raumkoordinaten, $\vec{x} \to -\vec{x}$. Seine Auswirkungen auf Spinoren lassen sich durch die $\gamma^0$ Matrix darstellen,

$$\psi'(x') = \gamma^0\psi(x) \tag{2.70}$$

Angewendet auf die Spinoren $u, v$ ergibt sich

$$\gamma^0 u^{(1,2)}(E,\vec{p}) = +u^{(1,2)}(E,-\vec{p}) \qquad \gamma^0 v^{(1,2)}(E,\vec{p}) = -v^{(1,2)}(E,-\vec{p}) \tag{2.71}$$

Also haben Spin-1/2 Teilchen positive Parität und Spin 1/2 Antiteilchen negative Parität.

Bei der Zeitumkehr wird nur das Vorzeichen der Zeit umgekehrt, $t \to -t$. Für Spinoren lässt sich das darstellen als

$$\psi'(t') = i\gamma^1\gamma^3\psi^*(t). \tag{2.72}$$

## 2.9 Dimensionen der Felder und Bilinearformen

Die Lagrange-Dichte hat die Dimension GeV$^4$. Aus dem Massenterm $\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi$ kann man die Dimensionen der Felder $\psi$ ablesen.

Für die Wechselwirkung mit dem Vektorpotential $A_\mu$ der Elektrodynamik findet man (siehe nächstes Kapitel) als Term in der Lagrangedichte $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ mit Kopplung $q$. Als kinetischen Term findet man $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Damit folgen als Dimensionen

$$\begin{aligned} [\psi] &= \mathrm{GeV}^{3/2} \\ [A_\mu] &= \mathrm{GeV} \\ [q] &= 1 \end{aligned}$$

Das Forderung nach einer renormierbaren Theorie erfordert nun, dass in der Lagrange-Dichte keine Kopplungen mit negativer Potenz von GeV auftreten dürfen.

Wegen ihrer Dimension GeV dürfen also maximal vier Vektorfelder in einem Term der Lagrange-Dichte auftreten. Hingegen treten wegen ihrer Dimension GeV$^{3/2}$ Dirac-Spinoren höchstens paarweise auf (Bilinearformen). Allgemein ist dies die Ursache für die Erhaltung der Fermionzahlen (Leptonzahl ud Baryonzahl).

Zum Beispiel für die Lagrange-Dichte der QED ist dies tatsächlich der Fall. Damit sind Alternativen zur QED bereits aus Gründen der Relativitätstheorie und der Konsistenz der Theorie (Renormierbarkeit) weitgehend eingeschränkt.

Es gibt aber neben den bereits in die Lagrange-Dichte eingeführten Termen auch andere Ausdrücke aus je zwei Spinoren, die für relativistisch invariante Terme verwendet werden könnten. Eine vollständige Liste ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Skalar | $\bar{\psi}\psi$ | 1 | Massenterm |
| Vektor | $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ | 4 | Strom der QED |
| Tensor | $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ | 6 | |
| Axial-Vektor | $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ | 4 | negative Parität |
| Pseudo-Skalar | $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ | 1 | negative Parität |

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)$. Die Zahlen geben an, wieviele unabhängige Bilinearformen in jedem Ausdruck vorkommen; Skalare sind 1-dimensional, Vektoren 4-dimensional und antisymmetrische 4x4 Tesoren haben 6 unabhängige Elemente. Damit sind alle 16 möglichen Kombinationen zweier 4-Spinoren dargestellt.

Es zeigt sich, dass für die QED und die QCD, in denen die Parität erhalten ist, außer dem Tensor keine andere Größen außer den bereits bekannten Massentermen und Strömen auftauchen dürfen. Für einen Tensor-Term gibt es aber keinen experimentellen Beleg. In der schwachen Wechselwirkung, die die Parität verletzt, werden auch Axial-Vektoren eine große Rolle spielen, da der Strom eines linkshändigen Spin-1/2 Teilchens

$$\bar{u}_L\gamma^\mu u_L \sim \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \tag{2.73}$$

also als Vektor - Axialvektor Strom (V-A Theorie der schwachen Wechselwirkung) ausgedrückt werden kann.