# Teilchenphysik für Fortgeschrittene

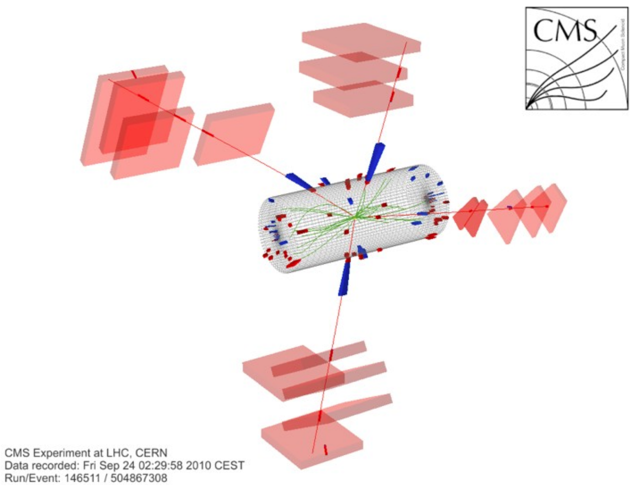
**Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2015-2016**

Peter Schleper

15. Oktober 2015

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

http://www.desy.de/~schleper/lehre/TeilchenFortgeschrittene/WS_2015_16



# Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung** **4**
1.1 Einheiten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.2 Relativistische Kinematik . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.3 Schrödinger-Gleichung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.4 Klein-Gordon-Gleichung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.5 Dirac Gleichung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.6 Lagrange-Formalismus . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.6.1 Für klassische Teilchen . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.6.2 Für die Klein-Gordon Gleichung . . . . . . . . . 15
1.6.3 Für die Dirac- Gleichung . . . . . . . . . . . . . . 15
1.7 Globale Symmetrien und Noether- Theorem . . . . . 16

# 1 Einleitung

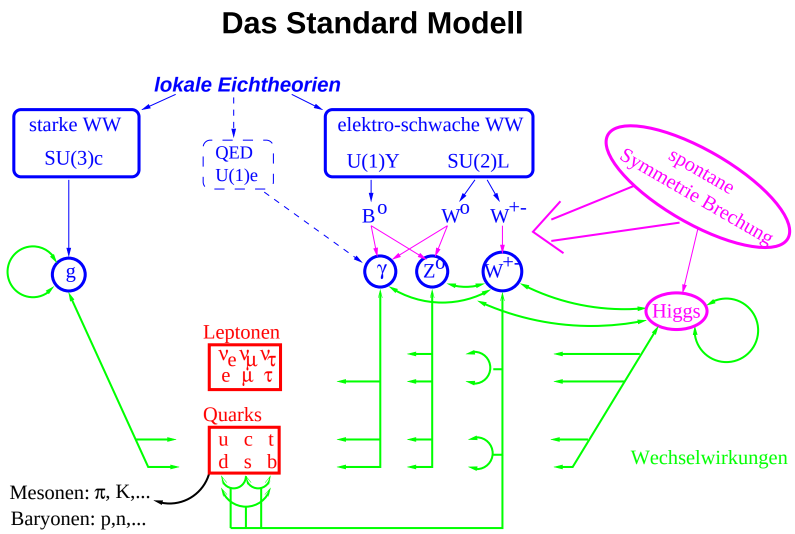



**Abb. 1.1** Schema des Standardmodells mit allen Teilchen. Grüne Pfeile stellen Wechselwirkungen dar.

- 19 Teilchen
- 26 freie Naturkonstanten
- Ist das ALLES ? Dunkle Materie und dunkle Energie ?
  Physik jenseits des Standard-Modells
- Bauprinzip ? Vereinfachungen ? Vereinheitlichungen ?
  Neue Symmetrien: Supersymmetrie, Grand Unified Theories

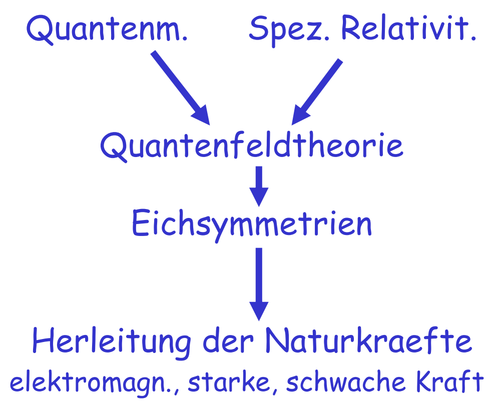



**Abb. 1.2** Schema für Eichtheorien.

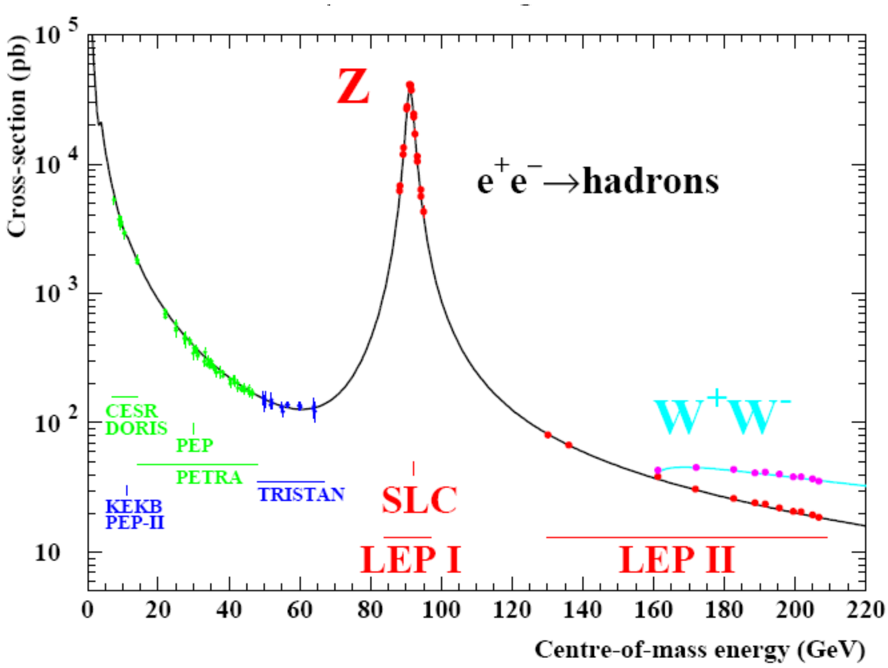



**Abb. 1.3** Wirkungsquerschnitte für Prozesse in $e^+e^-$ Kollisionen als Funktion der Schwerpunktsenergie.

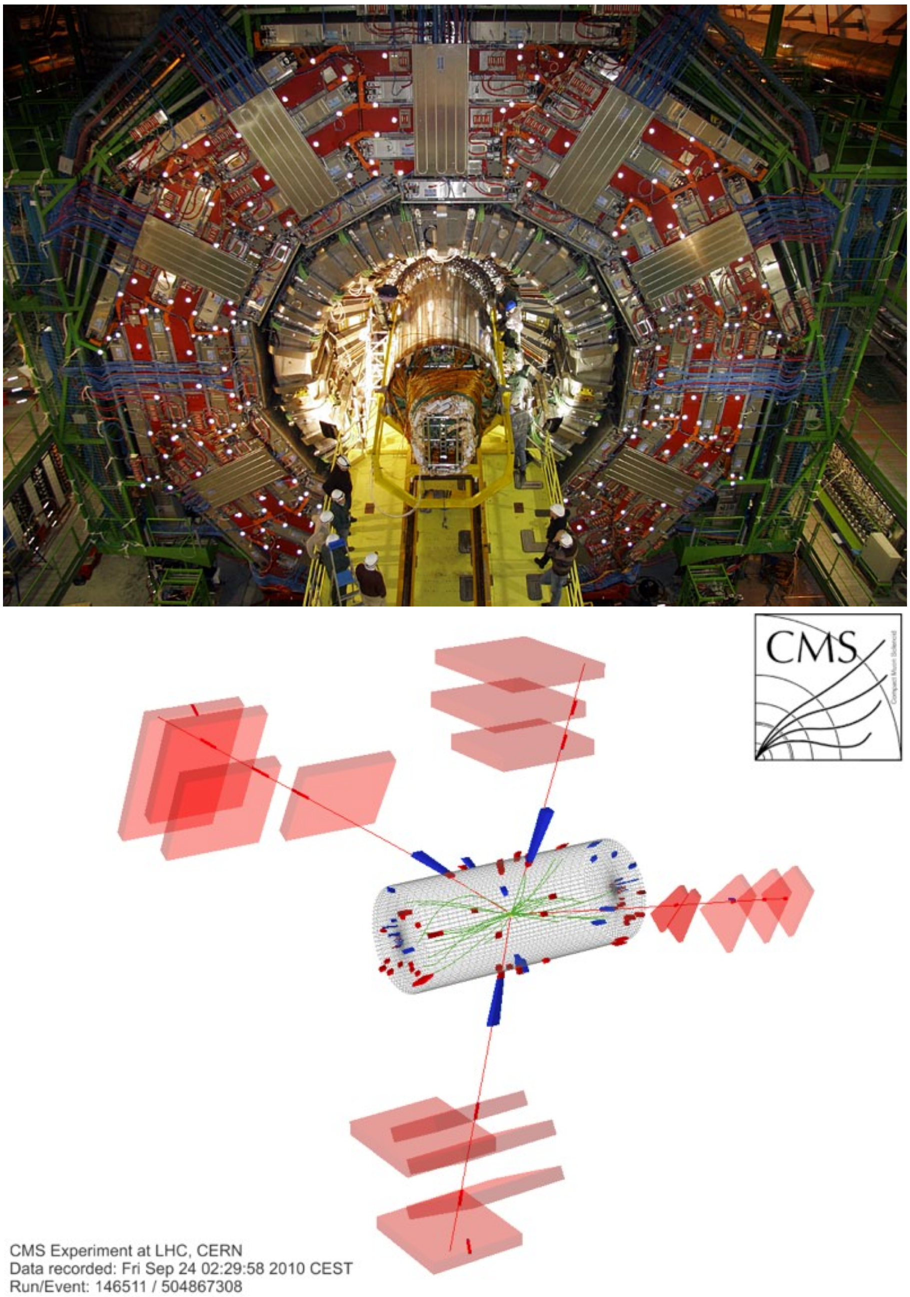



**Abb. 1.4** Foto des CMS Experiments am LHC und Bild eines Kandidaten für den Zerfall eines Higgs - Bosons.

| **Forderungen an eine fundamentale Theorie der Natur** | **Standard-Modell** |
|---|---|
| *Wenige Grundannahmen* | $\surd$ |
| Kausalität, Raum-Zeit, Quantentheorie | |
| *Wenige Naturkonstanten, Teilchen und Wechselwirkungen* | nein |
| 26 freie Parameter (ohne Gravitation); | |
| $e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, t, b, W^\pm, Z, \gamma, g, H,$ | |
| dunkle Materie | |
| *Vorhersagekraft* | $\surd$ |
| $\nu_\tau, t, W, Z$ , Higgs ? | |
| *gültig in allen Prozessen* | $\surd$ |
| in Laborexperimenten | |
| *gültig bei allen Energien: Extrapolierbarkeit* | nein |
| $\Lambda \gtrsim 1TeV \Rightarrow M_{\text{Higgs}} \to \infty$ | |
| Hierarchieproblem | |
| $\Lambda \geq 10^{19}GeV \Rightarrow$ Quanten-Gravitation | |
| *Erklärung warum die Natur so ist, wie sie ist* | nein |

$\Rightarrow$ Das Standard-Modell ist nicht die *TOE* (Theory of Everything)

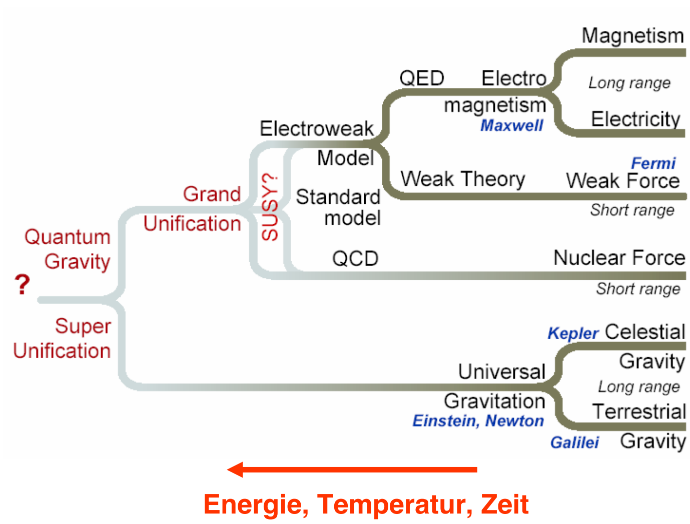



**Abb. 1.5** Schema der Vereinheitlichungen der Wechselwirkungen.

## 1.1 Einheiten

Wir sind interessiert an relativistischer Quantenmechanik. Daher verwenden wir als natürliches Einheitensystem eine Schreibweise, bei der

$$c = 1, \quad \hbar = 1$$

gestzt wird, so dass alle Faktoren $c$ und $\hbar$ vermieden werden können. Damit haben Zeit und Länge die gleiche Dimension (m). Ebenso haben Energie, Impuls und Masse die Dimension einer Energie (GeV). Außerdem schreibt sich die Unschärferelation z.B. als

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq 1.$$

Dies macht viele Formeln viel übersichtlicher. Für die Berechnung experimenteller Ergebnisse muß von diesem natürlichen Einheitensystem in SI Einheiten (m, kg, s) umgerechnet werden. Dies ist immer möglich durch einfache Dimensionsbetrachtungen:

$$c \approx 30 \frac{cm}{ns}$$

$$\hbar \approx 6,5822 \cdot 10^{-22} MeV\, s$$

$$\hbar c \approx 197\,\mathrm{MeV\,fm}$$

| Größe | Natürliche Einheit | Faktor | SI-Einheit | Bemerkung |
|---|---|---|---|---|
| Energie E | $MeV$<br>$GeV$ | | $MeV$<br>$GeV$ | z.B. LHC:<br>$E_{CMS} = 14\mathrm{TeV}$ |
| Impuls p | $MeV$ | $\cdot\frac{1}{c}$ | $\frac{MeV}{c}$ | |
| Masse M | $MeV$ | $\cdot\frac{1}{c^2}$ | $\frac{MeV}{c^2}$ | $E = mc^2$! |
| Zeit t | $MeV^{-1}$ | $\cdot\hbar$ | $s$ | $\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar$<br>$1MeV^{-1} = 6,5 \cdot 10^{-22}s$ |
| Länge | $MeV^{-1}$ | $\cdot\hbar c$ | $m$ | $1MeV^{-1} = 200$ fm<br>$1GeV^{-1} = 0,2$ fm |
| Geschwind. $\beta$ | 1 | $\cdot c$ | $\frac{m}{s}$ | $\beta = \frac{v}{c} \leq 1$ |
| Drehimpuls $\vec{L}$ | 1 | $\cdot\hbar$ | $Js$ | |

## 1.2 Relativistische Kinematik

Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf der Forderung, dass alle Inertialsysteme $S$ gleichberechtigt sind. Daraus folgt:

- Die Naturgesetze (Maxwell-Gl., ...) haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
- Die Naturkonstanten ($c$, $\hbar$, ...) haben in allen Inertialsystemen die gleichen Zahlenwerte.

Hieraus folgen ebenso Zeitdilatation und Längenkontraktion sowie die Formeln für die Lorentz-Tranformationen. Da Ort- und Zeit-Koordinaten gleichermaßen transformiert werden müssen ist die einfachste Notation die der Vierervektoren im Minkowski-Raum:
Kontravarianter Vierervektor:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x}) \,.$$

Die Zeit wird hier mit der Lichtgeschwindigkeit $c$ multipliziert, damit aller Komponenten des Vierervekors die Dimension einer Länge haben. In natürlichen Einheiten wird $c = 1$ gesetzt, also:

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \,,$$

wobei $\mu = 0, 1, 2, 3$ so dass die 0-Komponente die Zeit ist, $x^0 = t$. Im Folgenden werden griechische Indizes $(\mu, \nu, ..)$ verwendet um Komponenten von Vierervektoren zu bezeichnen. Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt, dass Skalarprodukte (Abstände) von Vierervektoren invariant sind. Mit dem "kovarianten" Vierervektor

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z) \,.$$

ist das Skalarprodukt zweier Vierervekotren definiert als

$$x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 .$$

Hierbei wird also als Summenkonvention über gleiche, unten und oben stehende Indizes summiert. Kontravariante und kovariante 4-er Vektoren lassen sich durch den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ ineinander umrechnen:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

mit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

In einem anderen Inertialsystem $S'$ mit Koordinaten $x'^\mu$ gilt:

$$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$$

Ebenso gilt für beliebige andere Vierervektoren

$$a^\mu = (t_a, x_a, y_a, z_a) \,, \quad b^\mu = (t_b, x_b, y_b, z_b)$$

, dass

$$a^\mu b_\mu = t_a t_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b = t'_a t'_b - x'_a x'_b - y'_a y'_b - z'_a z'_b = a'^\mu b'_\mu$$

Lorentztransformation erlauben die Umrechnung von allen 4-er Vektoren zwischen verschiedenen Inertialsystemen. Aus Sicht eines Systems $S'$, dass sich mit Geschwindigkeit $\beta_s = v_s/c < 1$ und

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_s^2}}$$

in x-Richtung bewegt, gilt (wenn der Ursprung von $S$ und $S'$ zur Zeit $t = 0$, $t' = 0$ übereinander liegt):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s & 0 & 0 \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s t - \gamma_s\beta_s x \\ \gamma_s x - \gamma_s\beta_s t \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

also

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$$

<u>4-er Impulsvektor:</u>
Analog zu Zeit und Ort werden Energie und Impuls eines Teilchens zu einem 4-er Vektor zusammengefasst:

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

wobei die Norm des 4-er Impulsvektors die (Ruhe-) Masse $m$ ist.

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2.$$

(Setzt man $c$ explizit ein entspricht dies $E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.)
Im Ruhesystem eines Teilchen is $\vec{p}^* = 0$, so dass $E^* = m$. Die Lorentz-Transformation eines 4-er Impulses erfolgt wie bei anderen 4-er Vektoren auch:

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s & & \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Bewegt sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\beta$, so ergibt sich mit $(\beta = \beta_s)$ aus der Lorentz-Transformation für Energie, Impuls und kinetische Energie:

$$E = \gamma m$$

$$\vec{\beta} = \vec{p}/E$$

$$\vec{p} = \gamma\vec{\beta}m$$

$$E_{kin} = E - m = (\gamma - 1)m$$

Es folgt: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{=1} m^2$, so dass $p^\mu p_\mu = m^2$ in allen Systemen. Daraus folgt auch das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E} \qquad \beta'_x = \frac{p'_x}{E'} = \frac{\gamma_s p_x - \gamma_s \beta_s E}{\gamma_s E - \gamma_s \beta_s p_x} = \frac{\beta_x - \beta_s}{1 - \beta_x \beta_s}$$

sowie die kinematischen Grenzfälle für Teilchen-Impulse:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ruhend: | $\beta = 0$ | $\gamma = 1$ | $\vec{p} = 0$ | $E = m$ |
| langsam: | $\beta \gtrsim 0$ | $\gamma \gtrsim 1$ | $\lvert\vec{p}\rvert \ll m$ | $E = m + \frac{1}{2}m\beta^2 + \ldots \beta^4 + \ldots$ |
| ultrarelativ.: | $\beta \approx 1$ | $\gamma \gg 1$ | $\lvert\vec{p}\rvert \gg m$ | $E \approx \lvert\vec{p}\rvert$ |
| Masse-los: | $\beta = 1$ | $\gamma = \infty$ | $\lvert\vec{p}\rvert = E$ | |

Ableitungen: Als 4-er Ableitung wird definiert:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

oder, mit $c = 1$,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

sowie

$$\partial^\mu = (\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$$

Wahl der Vorzeichen beachten!

Damit ist z.B. die Variation einer skalaren Funktion $\Phi(x)$ gegeben durch

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu}\,\delta x^\mu = (\partial_\mu \Phi)\,\delta x^\mu$$

ebenfals ein Skalar. Es folgt auch

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \Box$$

## 1.3 Schrödinger-Gleichung

QM- Wellengleichung für nicht-relativistische Teilchen.
Benutzt wird die nicht-relativistische Energie-Impuls Beziehung für freie Teilchen:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Quantisierung: Ersetzt man Energie und Impuls eines Teilchens durch die Operatoren

$$E \to i\partial_t, \quad p \to -i\nabla$$

und wendet das Resultat auf eine Wellenfunktion $\psi(x,t)$ an, so folgt die Schrödinger-Gleichung,

$$-i\partial_t\psi = \frac{1}{2m}\nabla^2\psi$$

(in natürlichen Einheiten, $\hbar = 1$). Lösungen sind ebene Wellen:

$$\psi = \psi_0 e^{i(Et-\vec{p}\vec{r})},$$

so dass mit $\partial_t\psi = iE\psi$, $\nabla\psi = -i\vec{p}\psi$ und $\nabla^2\psi = -\vec{p}^2\psi$ die Energie-Impuls Beziehung wieder erfüllt ist:

$$E\psi = \frac{\vec{p}^2}{2m}\psi$$

## 1.4 Klein-Gordon-Gleichung

Dies ist die relativistische Wellengleichung für Spin-0 Teilchen.
Anders als bei der Schrödingergleichung startet man von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \qquad \text{oder} \qquad p^\mu p_\mu = m^2$$

Ersetzt man Energie und Impuls durch die gleichen Operatoren wie im nicht-relativistischen Fall, so erhält man den relativistischen 4-er Impulsoperator:

$$E \to i\partial_t, \quad p \to -i\nabla$$

oder

$$\vec{p}^\mu \to i\partial^\mu. \tag{1.2}$$

Dies erklärt auch die Vorzeichenwahl bei der Definition von $\partial^\mu$.
Dies setzt man in die Energie-Impulsbeziehung ein und wendet die Operatoren auf eine Wellenfunktion $\Phi(x,t)$ an:

$$-\partial_t^2\Phi = -\nabla^2\Phi + m^2\Phi$$

oder

$$\boxed{\left(\partial^\mu\partial_\mu + m^2\right)\Phi = 0} \tag{1.3}$$

denn $\partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$. Dies ist die Klein-Gordon Gleichung für relativistische Spin-0 Teilchen. Lösungen sind wieder ebene Wellen,

$$\Phi(x) = \Phi_0 \, e^{i(Et - \vec{p}\vec{r})} = \Phi_0 \, e^{i p^\nu x_\nu}$$

mit der Lorentz-invarianten Phase $p^\nu x_\nu$. Da z.B. $\partial^t p^\nu x_\nu = p^0 = E$ ist folgt auch

$$\partial^\mu (p^\nu x_\nu) = p^\mu, \qquad \partial_\mu (p^\nu x_\nu) = p_\mu$$

so dass Einsetzen der Wellenfunktion in die Klein-Gordon Gleichung wieder die relativistische Energie-Impuls Beziehung liefert.

## 1.5 Dirac Gleichung

Dies ist die relativistische Wellengleichung für Spin 1/2 Teilchen. In relativistischen Wellengleichungen können Ort- und Zeit- Ableitungen nur gleichberechtigt, d.h. in der Form $\partial^\mu$ auftreten. Eine Gleichung linear in den Ableitungen ist die Dirac-Gleichung

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi = 0} \tag{1.4}$$

Bestimmt man die Größen $\gamma^\mu$ so, dass für eine ebene Welle $\psi$ die relativistische Energie-Impuls Beziehung $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ erfüllt sein muß, so folgt:

- Jedes $\gamma^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) ist eine 4x4 Matrix. Hinter $m$ in der Dirac-Gleichung steht also (nicht ausgeschrieben) eine 4x4 1er-Matrix im Spinor-Raum. Damit die Dirac-Gleichung Lorentz-invariant ist muss gelten[1]

  $$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

  Auch hier steht (nicht ausgeschrieben) auf der rechten Seite eine 4x4 1er-Matrix im Spinor-Raum.

- $\psi$ ist ein 4-Spinor mit den 4 Komponenten $\psi_k = \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Hier ist $k$ kein Lorentz-Index sondern der Spinor-Index (Römische Buchstaben). Der Spinor hat also 4 Freiheitsgrade:
  (Teilchen, Antiteilchen) x (2 Spineinstellungen)
  Die Dirac-Gleichung gilt also für Spin 1/2 Teilchen und sagt die Existenz von Anti-Materie voraus.

[1] Beweis: Ersetzt man in der Dirac-Gleichung ($m\psi = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi$) den Impulsoperator durch den Impulserwartungswert, $i\partial_\mu \psi = p_\mu \psi$, so erhält man $m\psi = \gamma^\mu p_\mu \psi$. Multipliziert man nun die Gleichung mit $m$ so folgt $m^2\psi = \gamma^\mu p_\mu (m\psi) = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu \psi$. Das Produkt der beiden Summen rechts lässt sich schreiben als

$$\gamma^\mu p_\mu \, \gamma^\nu p_\nu \psi = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\, p_\mu p_\nu \psi = m^2 \psi = \left(E^2 - \vec{p}^2\right) \psi = p^\mu p_\mu \psi = g^{\mu\nu} p_\nu p_\mu \psi.$$

Der zweite und letzte Term können nur gleich sein, wenn $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ erfüllt ist.

Ausgeschrieben in allen Komponenten lautet die Dirac-Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{4}\left[\sum_{\mu=0}^{3} i(\gamma^\mu)_{jk}\partial_\mu - m\delta_{jk}\right]\psi_k = 0$$

**Dirac-Pauli Notation**

Die 4x4 $\gamma$-Matrizen beinhalten nur Zahlen und lassen sich durch die 2x2 Pauli-Matrizen darstellen. In der Dirac-Pauli Notation lauten sie:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Die zusätzliche $\gamma^5$ Matrix ist nicht Teil der Dirac-Gleichung, wird aber später benötigt. Die Pauli-Matrizen $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ lauten in der Dirac-Darstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Weyl- Notation**

In manchen Fällen ist es vorteilhaft eine andere Konvention für die $\gamma$- Matrizen zu verwenden,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

In dieser Notation haben dann auch die Lösungen der Dirac Gleichung eine andere Form.

## 1.6 Lagrange-Formalismus

### 1.6.1 Für klassische Teilchen

Klassisch und nicht-relativistisch ist die Lagrange-Funktion für ein Teilchen eine Funktion der Ortskoordinaten und deren Zeitableitungen,

$$L(\vec{x}, \partial_t\vec{x}) = T - V = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V = \frac{1}{2}m(\partial_t\vec{x})^2 - V(\vec{x})$$

oder mit verallgemeinerten Koordinaten $q, \partial_t q$,

$$L = L(q, \partial_t q)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \partial_t \frac{\partial L}{\partial(\partial_t q(t))} = 0$$

folgen die Bewegungsgleichungen. Ist z.B. $q = \vec{x}$, so folgt mit

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{F}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \vec{x})} = m \cdot (\partial_t \vec{x}) = \vec{p}$$

das Gesetz von Newton:

$$\vec{F} = \partial_t \vec{p},$$

### 1.6.2 Für die Klein-Gordon Gleichung

Felder sind nicht durch einzelne Koordinaten beschrieben, sondern sind Funktionen vor Ort und Zeit. Man geht daher zur Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ über, die mit der Lagrange-Funktion und der Wirkung über

$$L = \int d\vec{x}\,\mathcal{L}, \quad S = \int d^4x\,\mathcal{L}$$

zusammenhängt. Da die Wirkung dimensionslos sein soll und Längen die Dimension [GeV$^{-1}$] haben ist die Dimension der Lagrange-Dichte also [GeV$^4$]. Für ein skalares (Spin 0), reelles Feld $\Phi(x)$ als Funktion von Ort und Zeit-Koordinaten ist die Lagrange-Dichte eine Funktion der Felder $\Phi$ und deren Änderungen $\partial_\mu\Phi$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} = 0$$

Die Klein-Gordon Gleichung lässt sich aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - \frac{1}{2}m^2\Phi^2$$

ableiten, denn es gilt:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = -m^2\Phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\right) = \partial_\mu(\partial^\mu\Phi) = \partial_\mu\partial^\mu\Phi,$$

insgesamt also

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\partial^\mu\Phi + m^2\Phi = 0,$$

also die Klein-Gordon-Gleichung.

### 1.6.3 Für die Dirac- Gleichung

Die Dirac- Wellenfunktionen bestehen auc 4 komplexen Feldern $\psi$. Anstatt Real- und Imaginär- Teile zu betrachten benutzt man equivalent die Funktionen und ihre komplex konjugierten, ausgedrückt durch die “adjungierten” Spinoren

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0,$$

wobei $\dagger$ wie üblich komplex konjugiert und transponiert bedeutet:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \qquad \psi^\dagger = (\psi_1^*,\ \psi_2^*,\ \psi_3^*,\ \psi_4^*)$$

Bei Variation der Lagrange- Dichte fungieren alle Komponenten von $\psi$ und $\bar{\psi}$ und ihre Ableitungen als getrennte Variablen,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi,\, \partial_\mu\psi,\, \bar{\psi},\, \partial_\mu\bar{\psi})$$

Die Lagrange- Dichte der Dirac- Gleichung lautet für ein freies Teilchen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\,.$$

Aus der Euler- Lagrange Gleichung für $\bar{\psi}$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0$$

folgt mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\,.$$

die Dirac- Gleichung für $\psi$:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0\,.$$

Ebenso folgt aus der Euler- Lagrange Gleichung für $\psi$,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = 0$$

mit

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}$$

die Dirac- Gleichung für $\bar{\psi}$:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0.$$

also die adjungierte Gleichung zur Dirac- Gleichung.

## 1.7 Globale Symmetrien und Noether- Theorem

Invarianz unter Translation, Zeit-Verschiebung und Rotation führen zu den Erhaltungssätzen für Impuls, Energie und Drehimpuls. Im Gegensatz zu diesen "äußeren" Symmetrien geht es im Folgenden um "innere" Symmetrien, deren Transformationen mit den Raum-Zeit Transformationen vertauschen. Für eine Wellenfunktion $\psi(x)$ ist die "globale Phasentransformation" (=Eichtransformation, gauge transformation) definiert durch

$$\psi \;\rightarrow\; \psi' = U\psi = e^{i\alpha}\,\psi$$

Global heist, das der Parameter $\alpha$ nicht von Ort und Zeit abhängen soll. Solche Transformationen mit reellem Parameter $\alpha$ bilden die

Gruppe $U(1)$ der unitären Transformationen mit einem kontinuierlichen Parameter. Da

$$\begin{aligned} \partial_\mu\psi &\rightarrow \partial_\mu\psi' = e^{i\alpha}\,\partial_\mu\psi' \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha}\,\bar{\psi} \end{aligned}$$

ist die Lagrange- Dichte der Dirac- Gleichung invariant unter globalen Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \;\rightarrow\; \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' \\ &= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

Die Gruppe $U(1)$ ist eine sog. Abel'sche Gruppe, da ihre Elemente vertauschen, $U(\alpha)U(\beta) = U(\beta)U(\alpha)$. Unter einer infinitesimalen Transformation ($\alpha << 1$),

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' = (1+i\alpha)\psi \quad &\Rightarrow \quad \delta\psi = i\alpha\psi \\ \partial_\mu\psi \rightarrow \partial_\mu\psi' = (1+i\alpha)\partial_\mu\psi \quad &\Rightarrow \quad \delta(\partial_\mu\psi) = i\alpha\,\partial_\mu\psi \end{aligned}$$

sollte sich die Lagrange- Dichte ebenfalls nicht ändern. Daher gilt für die Variation von $\mathcal{L}$ (Produktregel):

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \ldots(\bar{\psi}) \\ &= i\alpha\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)}_{=0 \text{ Euler Lagrange}}\psi + i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right) + \ldots(\bar{\psi}) \end{aligned}$$

Demnach muss der zweite Term zusammen mit dem entsprechenden Audruck für $\bar{\psi}$ ebenfalls verschwinden,

$$i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = -\alpha\partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0$$

Dies stellt die Kontinuitätsgleichung für einen erhaltenen 4-er Strom

$$j^\mu \sim \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

dar, da

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_t j^0 + \nabla\vec{j} = 0$$

ist, wobei $j_0$ die Dichte und $\vec{j}$ die entsprechende Vektorstromdichte ist. Die gesamte “Ladung”

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

ist damit eine Erhaltungsgröße. Dies ist ein Beispiel für das Theorem von Noether: Aus Symmetrien folgen Erhaltungssätze. Aus der inneren Symmetrie folgt eine Kontinuitätsgleichung für einen 4-er Strom und Ladungs- Erhaltung.