C Ergänzungen zum Propagator

Die Eigenschaften des Propagators für Dirac-Teilchen

$$\tilde{D}(p) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

lassen sich nach Rücktransformation zu $D(x - x')$ verstehen.

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \; e^{-ip(x-x')} \; \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon}$$

Insbesondere findet man für die Beziehung zwischen den Wellenfunktionen an verschiedenen Orten x und x':

$$\Psi(x) = i \int d\vec{x}' \; D(x - x') \, \gamma^0 \, \Psi(x')$$

Dies soll jetzt bewiesen werden. Mit $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ folgt für den Nenner von $\tilde{D}$:

$$p^\mu p_\mu - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon = p_0^2 - E^2 + i\epsilon \approx (p_0 - (E - i\epsilon)) \; (p_0 + (E - i\epsilon))$$

für $\epsilon \to 0$. Wegen der Polstelle bei $p_0 = E - i\epsilon$ lässt sich das Integral über die Energiekomponente p_0 mit Hilfe des Residuensatzes ausführen:

$$\begin{aligned} D(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{p} \; e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int dp_0 \; e^{-ip_0(t-t')} \; \frac{1}{p_0 - (E - i\epsilon)} \; \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p_0 + (E - i\epsilon)} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \; e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \; e^{-iE(t-t')} \; \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m}{2E} \end{aligned}$$

Für eine eben Welle

$$\Psi(x') = u(k) e^{-ikx'} = u(k) e^{-ik_0 t'} e^{i\vec{k}\vec{x}'}$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} & i \int d\vec{x}' \; D(x - x') \, \gamma^0 \, \Psi(x') \\ = \; & \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \left(\int d\vec{x}' \; e^{-i(\vec{p}-\vec{k})x'} \right) \; e^{i\vec{p}\vec{x}} \; e^{-ik_0 t'} \; e^{-iE(t-t')} \; \frac{\gamma^0 E - \vec{\gamma}\vec{p} + m}{2E} \gamma^0 \, u(k) \\ = \; & e^{i\vec{k}\vec{x}} \; e^{-ik_0 t'} \; e^{-ik_0(t-t')} \; \frac{\gamma^0 k_0 - \vec{\gamma}\vec{k} + m}{2k_0} \gamma^0 \, u(k) = e^{-ikx} \; u(k) \end{aligned}$$

wobei das Integral über $d\vec{x}'$ durch $(2\pi)^3 \, \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$ ersetzt wurde und damit E durch k_0, sowie mit Hilfe der Dirac Gleichung:

$$(-\vec{\gamma}\vec{k}\gamma^0 + m\gamma^0)u = \gamma^0(\vec{\gamma}\vec{k} + m)u = \gamma^0(\gamma^0 k_0)u = k_0 u$$