B Drehimpuls und Rotation

Für infinitesimal kleine Translationen, d.h. Verschiebungen entlang einer Richtung, lassen sich Zustände schreiben als

$$\Psi' = D\Psi = \Psi(x + \delta x) = \Psi(x) + \delta x\, \partial_x \Psi = (1 + i\, \delta x\, p_x)\Psi \tag{B.1}$$

mit dem Impulsoperator $p_x = -i\partial_x$ als Generator der Transformation. Endlich große Verschiebungen

$$\Delta x = n\, \delta x$$

ergeben sich aus n infinitesimal kleinen Verschiebungen, die hintereinander ausgeführt werden, im Limes $n \to \infty$ und[15] $\delta x \to 0$.

$$D = \lim_{n\to\infty} (1 + i\delta x\, p_x)^n = e^{ip_x \Delta x} \tag{B.2}$$

Ganz analog gilt für eine infinitesimal kleine Rotation z.B. um die z-Achse

$$\Psi' = R\Psi = \Psi(\varphi + \delta\varphi) = \Psi(\varphi) + \delta\varphi\, \partial_\varphi \Psi = (1 + i\, \delta\varphi\, J_z)\Psi$$

mit der Drehimpulskomponente

$$J_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -i(x\, \partial_y - y\, \partial_x)$$

als Generator der Rotation um die z-Achse. Das J_z tatsächlich der richtige Generator ist sieht man aus den rotierten Koordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad \delta x = (\partial_\varphi x)\delta\varphi = -r\sin\varphi\, \delta\varphi \quad = -y\delta\varphi \tag{B.3}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \delta y = (\partial_\varphi y)\delta\varphi = r\cos\varphi\, \delta\varphi \quad = x\delta\varphi \tag{B.4}$$

und

$$R\Psi(x,y,z) = \Psi(x',y',z) \tag{B.5}$$
$$= \Psi(x,y,z) + (\partial_x\Psi)\delta x + (\partial_y\Psi)\delta y \tag{B.6}$$
$$= \Psi(x,y,z) - y\delta\varphi\, \partial_x\Psi + x\delta\varphi\, \partial_y\Psi \tag{B.7}$$
$$= (1 + i\, \delta\varphi\, J_z)\, \Psi(x,y,z) \tag{B.8}$$

Für eine Rotation um einen endlich großen Winkel $\Delta\varphi = n\delta\varphi$ gilt wie oben:

$$R = \lim_{n\to\infty} (1 + i\delta\varphi\, J_z)^n = e^{iJ_z\Delta\varphi}$$

[15] Die Taylorentwicklung von

$$\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n}\frac{ix}{1!} + \frac{n(n-1)}{n^2}\frac{(ix)^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

liefert für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + i\frac{x}{n})^n = 1 + ix + i^2\frac{(x)^2}{2!} + i^3\frac{(x)^3}{3!} + \cdots = e^{ix}$$

Für die Komponenten J_i des durch $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ definierten Drehimpulsoperators und für $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \qquad [J^2, J_i] = 0$$

Für die Auf- und Absteigeoperatoren

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

gilt

$$[J_z, J_+] = J_+ \qquad J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + J_z$$
$$[J_z, J_-] = -J_- \qquad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - J_z$$

Für einen Drehimpulszustand $|jm>$ mit Gesamtdrehimpuls j und z-Komponente m gilt

$$-j \leq m \leq j \qquad J_z\,|jm> = m\,|jm> \qquad J^2\,|jm> = j(j+1)\,|jm>$$

Daraus folgt

$$J_z\,(J_-\,|jm>) = J_-(J_z - 1)\,|jm> = (m-1)\,(J_-\,|jm>)$$

und

$$J_z\,(J_+\,|jm>) = (m+1)\,(J_+\,|jm>)$$

so dass für die Auf-und Absteigeoperatoren gilt:

$$J_+\,|jm> = C_+\,|j,\,m+1> \qquad J_-\,|jm> = C_-\,|j,\,m-1>$$

mit

$$C_+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \qquad C_- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$

Dreht man einen Zustand $|j,\,m>$ um die y-Achse um den Winkel θ, so wird daraus eine Linearkombination von Zuständen $|j,\,m'>$ mit gleichem Gesamtdrehimpuls j und neuen dritten Komponenten m'.

$$e^{-i\theta J_y}\,|j,\,m> = \sum_{m'} d^j_{m'm}(\theta)\,|j,\,m'>$$

Die einzelnen d-Funktionen sind von θ und von j, m, m' abhängig und werden Drehmatrizen genannt. Multiplikation von links mit $<j,\,m'|$ liefert

$$<j,\,m'|\,e^{-i\theta J_y}\,|j,\,m> = d^j_{m'm}(\theta)$$

Der Fall Spin $j = \frac{1}{2}$

Für die Darstellung der beiden möglichen Zustände $|j,\,m>$

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist die Darstellung von J_y geben durch die Pauli-Matrizen,

$$J_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\sigma_y^2 = 1$ folgt aus einer Taylorentwicklung für sin und cos:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta J_y} &= \cos(-\theta J_y) + i\sin(-\theta J_y) \\ &= 1_2\cos(\frac{\theta}{2}) - i\sigma_y \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist z.B.

$$\begin{aligned} d^j_{m'm} &= d^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ &= < j, m'| e^{-i\theta J_y} |j, m> \\ &= (1,0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Der Fall Spin $j = 1$

Berechnet werden soll z.B. $j = 1, m = 1, m' = 1$, also $d^1_{1,1}$. Auch ohne explizite Darstellung ist die Berechnung möglich wenn man berücksichtigt, dass $J_y = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$. Für die ersten Terme der Taylor-Entwicklung

$$e^{-i\theta J_y} = 1 - i\theta J_y - \frac{\theta^2}{2!}J_y^2 + i\frac{\theta^3}{3!}J_y^3 + \cdot$$

folgt wegen $J_+|1,1>= 0$:

$$J_y|1,1> = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)|1,1>= \frac{i}{2}J_-|1,1>= \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0>$$

$$J_y^2|1,1> = \frac{1}{2}(|1,1> - |1,-1>)$$

etc. Daraus folgt

$$< 1,1| e^{-i\theta J_y} |1,1>= 1 - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{\theta^4}{4!} + \cdot$$

oder

$$d^1_{1,1} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$