

# Universität Hamburg

Fachbereich Physik



Analyse des Spektrums der

Supernova SN 2003Z

mit PHOENIX

**Diplomarbeit**

Sebastian Knop

vorgelegt in Hamburg am 18. Mai 2004



# Zusammenfassung

Die Supernova SN 2003Z wurde am 29. Januar im Jahr 2003 in der Galaxie NGC 2742 entdeckt. Es wurden Spektren am vierten, fünften, neunten und elften Februar 2003 im Wellenlängenbereich von ca. 3500 bis 7500 Å aufgenommen. Die Beobachtungen wurden von Stefan Dreizler mit dem 3.5-Meter-Teleskop auf dem Calar Alto und dem TWIN Spektrographen aufgenommen.

Diese vier Spektren der Supernova SN 2003Z wurden mit Hilfe des Programm-Pakets PHOENIX modelliert.

PHOENIX ist in der Lage, das Spektrum einer Supernova speziell relativistisch unter der Annahme von sphärischer Symmetrie unter Berücksichtigung von NLTE-Effekten zu berechnen.

Durch Vergleiche der Modellspektren mit den Beobachtungen wurden die Effektivtemperatur der Supernova-Atmosphäre an den verschiedenen Tagen bestimmt. Für die charakteristische Geschwindigkeit des Geschwindigkeitsprofils der Atmosphäre konnte eine obere Grenze ermittelt werden.

Des Weiteren wurde der Farbzexess  $E(B - V)$  von SN 2003Z abgeschätzt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Supernova?</b>	<b>8</b>
2.1	Historisches . . . . .	8
2.2	Spektren von Supernovae . . . . .	10
2.3	Mechanismus einer Supernova vom Typ II . . . . .	13
2.4	Die Nukleosynthese in Supernovae . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Spektrenbildung in Atmosphären</b>	<b>19</b>
3.1	Gültigkeit von thermodynamischen Näherungen . . . . .	19
3.2	Beschreibung des Strahlungsfeldes . . . . .	21
3.3	Das Strahlungsfeld in sphärischer Symmetrie . . . . .	23
3.4	Wechselwirkung von Strahlung mit Materie . . . . .	25
3.4.1	Extinktion und Emission . . . . .	25
3.4.2	Streuung . . . . .	27
3.4.3	Linienprofile . . . . .	28
3.4.4	Die Wirkungsquerschnitte . . . . .	30
3.5	Die Ratengleichung . . . . .	32
3.5.1	Strahlungsraten . . . . .	32
3.5.2	Kollisionsraten . . . . .	33
3.6	Die Quellfunktion und die optische Tiefe . . . . .	34
3.7	Strahlungstransport in bewegten Medien . . . . .	35
3.7.1	Strahlungstransportgleichung . . . . .	35
3.7.2	Die Invarianten des Strahlungstransports . . . . .	37
3.7.3	Kritik an den Invarianten des Strahlungsfeldes . . . . .	39
3.7.4	Die Strahlungstransportgleichung in einem gleichförmig bewegten System . . . . .	40
<b>4</b>	<b>PHOENIX und dessen Arbeitsweise</b>	<b>42</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	42
4.2	Physikalische Annahmen . . . . .	43
4.3	Die Charakteristiken des Strahlungsfeldes . . . . .	44
4.4	Die formale Lösung für statische Medien . . . . .	46
4.5	Die formale Lösung für expandierende Medien . . . . .	47
4.6	Die $\Lambda$ -Iteration . . . . .	48
4.7	Die »operator splitting« Methode . . . . .	49
4.8	Die Iteration der Ratengleichung . . . . .	50

4.9	Temperaturkorrektur nach Unsöld-Lucy . . . . .	52
4.9.1	Die Unsöld-Lucy-Methode . . . . .	52
4.9.2	Verallgemeinerte Unsöld-Lucy-Methode für expandierende Medien	53
4.10	Globales Iterationsschema von PHOENIX . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Die Supernova SN 2003Z</b>	<b>56</b>
5.1	Die gemessenen Spektren . . . . .	57
5.2	Die einzelnen Tage . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Modellierung der SN 2003Z mit PHOENIX</b>	<b>68</b>
6.1	Die Konvergenz von Modellen . . . . .	69
6.2	Abschätzung der Effektivtemperatur . . . . .	70
6.3	Abschätzung der Geschwindigkeit . . . . .	71
6.4	Die Wahl der Ionisationsstufen . . . . .	73
6.5	Der Einfluss von Radioaktivität . . . . .	76
6.6	Einfluss des NLTE . . . . .	81
6.7	Entstehung des Spektrums . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Ergebnisse der Modellrechnungen</b>	<b>87</b>
7.1	Ergebnisse der Startwerte . . . . .	87
7.2	Variation der Effektivtemperatur . . . . .	88
7.3	Variation des radioaktiven Alters . . . . .	89
7.4	Variation des Dichteexponenten . . . . .	90
7.5	Erhöhung der Effektivtemperatur und der Extinktion . . . . .	92
7.6	Modelle mit höheren Effektivtemperaturen . . . . .	94
7.7	Modellspektren der SN 2003Z . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse und Ausblick</b>	<b>102</b>
	<b>Anhang</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Strahlungsenergieimpulstensor</b>	<b>109</b>
<b>B</b>	<b>Invarianten des Strahlungstransports</b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Relativistische Strahlungstransportgleichung</b>	<b>113</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>116</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Diese Arbeit ist der schriftliche Teil der Prüfungen zur Erlangung des Diploms in Physik an der Universität Hamburg.

Sie dokumentiert die wissenschaftliche Tätigkeit zum Thema »Analyse des Spektrums der Supernova SN 2003Z mit PHOENIX«, die im Zeitraum von Mai 2003 bis Mai 2004 in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Peter Hauschildt an der Hamburger Sternwarte, dem astrophysikalischen Institut der Universität Hamburg, durchgeführt wurde.

In der Diplomarbeit wurde das Spektrum einer Supernova an verschiedenen Tagen mit Hilfe des Programm-Pakets PHOENIX modelliert.

Das Ziel der Arbeit bestand darin, sowohl die modellierte Supernova auf Hinblick ihrer physikalischen Gegebenheiten zu untersuchen, als auch die Anwendbarkeit von PHOENIX für die Modellierung einer vorgegebenen Spektrenserie einer Supernova zu überprüfen.

PHOENIX ist ein allgemeiner Sternatmosphären-Code, mit dem Supernova-Atmosphären modelliert werden können. PHOENIX wird in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. P. Hauschildt angewendet und weiterentwickelt.

Für die Arbeit war eine Einarbeitung in PHOENIX, in die Theorie des Strahlungstransports sowie in das Datenanalyseprogramm IDL (»interactive data language«) erforderlich.

Im folgenden Kapitel wird zunächst ein Überblick über das Phänomen einer Supernova gegeben. In den anschließenden Kapiteln wird die Theorie des Strahlungstransports und PHOENIX näher vorgestellt. Die darauffolgenden Kapitel beschäftigen sich mit den zur Verfügung stehenden Beobachtungen der Supernova SN 2003Z und der Modellierung der Atmosphäre.

Die Ergebnisse werden im Einzelnen dargestellt und diskutiert. Anschließend wird ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten gegeben.

## Kapitel 2

# Supernova?

In diesem Kapitel wird zunächst auf den historischen Hintergrund des Phänomens der Supernova eingegangen. Daraufhin werden die Klassifikation und die grundsätzlichen Eigenschaften des Spektrums einer Supernova beschrieben.

Weiterhin wird ein möglicher Mechanismus sowie die Rolle einer Supernova für die Elemententstehung erörtert.

### 2.1 Historisches

Supernovae<sup>1</sup> sind die lichtstärksten Erscheinungen, die wir kennen. Eine Supernova kann eine Leuchtkraft erreichen, die der einer ganzen Galaxie entspricht ( $\approx 10^{10} L_{\odot}$ ).

Im Gegensatz zu einer Galaxie ist die große Leuchtkraft einer Supernova nur sehr kurzlebig. Eine Supernova leuchtet auf und erreicht nach ungefähr 20 Tagen ihre maximale Helligkeit, die daraufhin wiederum auf Zeitskalen im Bereich von Monaten abnimmt (siehe dazu Abbildung 2.3).

Der Name Supernova ist eng mit der Bezeichnung eines anderen astrophysikalischen Phänomens verwandt — der Nova. Dieser Zusammenhang ist rein historischer Natur.

Da bei der Entdeckung neu erschienener Sterne ihre Entstehungsmechanismen unbekannt waren, wurden diese einfach »neue Sterne« genannt — Novae.

Die Namensgebung geht auf den dänischen Astronom Tycho Brahe zurück, der im Jahre 1572 eine Supernova beobachtete und in seinem Buch *De Nova Stella* (1573) über das Phänomen der neuen Sterne berichtete.

Doch auch schon vor Brahe wurden bereits Supernovae beobachtet. Eine Supernova wurde 1054 von chinesischen Astronomen beobachtet und dokumentiert. Den Überrest dieser Supernova sieht man heute als den Krebsnebel. Weiterhin wurden z.B. im Jahre 1006 eine sehr helle und 1604 von Kepler eine lange sichtbare Supernova beobachtet.

Zwischen den neuen Sternen wurde wegen mangelnder Kenntnis von Unterschieden bis Anfang des 20. Jahrhunderts noch nicht differenziert, es gab nur eine Klasse von neuen Sternen, die als Novae bezeichnet wurden.

Um 1920 wurden die Teleskope so gut, dass man diese Gruppe quantitativ untersuchen konnte und es zeigte sich, dass es unter den Novae eine Gruppe gab, die etwa zwei

---

<sup>1</sup>lat. Plural für Supernova.





**Abbildung 2.1:** Tycho Brahe, ein dänischer Astronom (1546-1601), beobachtet 1572 in Cassiopeia eine Supernova. Die Bezeichnung Nova geht auf seine Arbeit *De Nova Stella* von (1573) zurück. Die Verletzung seiner Nase, die auf dem Bild durch eine silberne Prothese verdeckt wird, zog er sich in einem Duell mit einem anderen Astronomen zu.

Magnituden heller waren als die anderen.

Bei der wissenschaftlichen Behandlung dieser neuen Sterne wurden zunächst viele verschiedenen Namen verwendet, z.B. »giant novae« (Lundmark 1920), »expectional novae« (Hubble 1929) und »Hauptnovae« (Baade 1929).

Der Name Supernova stammt aus der Feder von Baade und Zwicky [Zwicky, 1938] [Zwicky, 1940], und wurde von ihnen ab 1931 in Seminaren und bei ihrer gemeinsamen Arbeit verwendet. Die erste Publikation unter dem Namen Supernova stammt dagegen von Lundmark (1933).

Die Bezeichnung Supernova setzte sich international durch. Diese Bezeichnung dient jedoch heute mittlerweile nur noch als Oberbegriff, da Supernovae in verschiedenen Klassen auftreten.

Diese Klassifikation ergibt sich aufgrund fundamentaler Unterschiede in den beobachteten Spektren der Supernovae. Dies wird auf verschiedene physikalische Prozesse zurückgeführt, durch die eine Supernova entstehen kann.

Aus Beobachtungen vor und nach dem Ausbruch einer Supernova ist bekannt, dass es sich dabei um Sterne handelt, die durch den Ausbruch in einer Explosion zerstört werden.

Die Entdeckung von Supernovae ist durch die Entwicklung und Verbreitung von Teleskopen sehr vereinfacht worden. War zu Zeiten Brahes eine Supernova noch ein Jahrhundertereignis, so fand Zwicky bei intensiver Suche innerhalb von fünf Jahren bereits 20 Stück. Im Jahr 2003 wurden dagegen bereits 334 Supernovae<sup>2</sup> entdeckt [ASRAS, ].

<sup>2</sup>Vier davon —also weniger als 1% —haben sich als Falschmeldungen entpuppt.



Walter Baade



Fritz Zwicky

**Abbildung 2.2:** Walter Baade (1893-1960) und Fritz Zwicky (1898-1974) forschten zusammen über Supernovae. Sie schufen während ihrer Arbeit den Begriff der Supernova.

Die Benennung von Supernovae folgt einem einfachen Prinzip; hinter den Buchstaben SN folgt das Jahr der Entdeckung und die in Buchstaben angegebene Stelle in der Entdeckungsreihenfolge. Die ersten 26 werden mit einem großen Buchstaben, alle folgenden mit zwei kleinen beschrieben. Somit erhält die 26. Supernova des Jahres 2003 das Kürzel SN 2003Z, die 27. endet dagegen auf aa, während die 53. des gleichen Jahres mit SN 2003ba abgekürzt wird.

Viele Disziplinen der Physik sind nötig, um eine Supernova zu beschreiben. Zum heutigen Zeitpunkt scheinen die grundlegenden Prozesse, die an einer Supernova beteiligt sind, zwar verstanden zu sein, doch sind quantitative physikalische Details des Mechanismus noch ungeklärt.

Das Interesse an Supernovae als Studienobjekt beschränkt sich nicht allein auf sie selbst, vielmehr spielen sie eine wichtige Rolle im Verständnis der Nukleosynthese, der chemischen Entwicklung von Galaxien, der Entstehung von kompakten Objekten, wie Neutronensterne und schwarze Löcher, und in der Entwicklung des interstellaren Mediums. Weiterhin sind sie wegen ihrer großen Leuchtkraft auch noch in großer Entfernung beobachtbar, so dass sie in der Kosmologie als Entfernungsmesser eine wichtige Rolle spielen.

## 2.2 Spektren von Supernovae

Während der ersten Monate nach der Explosion ist das Material der Supernova optisch dick und das Spektrum formt sich in einer Atmosphäre. In dieser sind Strahlungstransporteffekte wichtig. Aufgrund der Ausdehnung der Hülle treten Dopplereffekte auf und Spektrallinien überblenden sich gegenseitig.

Supernovae haben sehr unterschiedliche spektrale Erscheinungsformen. 1939 untersuchte R. Minkowski eine Supernova, die keiner jemals zuvor beobachteten glich [Minkowski, 1939]. Bei einer systematischen Einteilung sah Zwicky sich genötigt, gleich fünf verschiedene Typen zu klassifizieren [Zwicky, 1964]. Sogar die am besten beobachtete Supernova

SN1987A wollte sich trotz ihres typischen Spektrums wegen ihres blauen Vorgängersterns nicht so recht in eine Standardbeschreibung von Supernovae einreihen lassen.

Nach [Minkowski, 1941] werden Supernovae heute in zwei Hauptklassen eingeteilt. Die Unterscheidung folgt dem Kriterium, ob sich Wasserstofflinien im Spektrum zeigen oder nicht.

Eine Supernova ohne Wasserstofflinien nennt man eine Supernova vom Typ I (SN I), eine Supernova mit Wasserstofflinien trägt die Bezeichnung Typ II (SN II).

Das Fehlen von Wasserstoff lässt sich nur dadurch erklären, dass der Vorläufer einer SN I ein Stern ist, der seinen Wasserstoff vollständig verloren hat. Kandidaten sind also Weiße Zwerge und Kerne von massiven Sternen, die ihre Hüllen z.B. in Pulsationsphasen verloren haben. In der Typ I-Klasse wird noch weiter unterschieden, ob Silizium und Helium im Spektrum sichtbar sind. SNe I mit Silizium werden mit a klassifiziert (SN Ia), SNe I ohne Silizium, aber mit Helium erhalten den Buchstaben b (SN Ib) [Elias *et al.*, 1985]. Ist weder Helium noch Silizium zu sehen, handelt es sich um eine SN Ic [Wheeler und Harkness, 1986].

Bei SN II werden lediglich zwei Unterklassen unterschieden. Diese Einteilung rechtfertigt sich aus den beobachteten Lichtkurven. So werden SNe II beobachtet, deren Helligkeit nach dem Erreichen des Maximums ungefähr linear abnimmt (siehe oberer Teil der Abbildung 2.3) und solche, die eine Plateauphase durchlaufen (siehe unterer Teil der Abbildung 2.3). Die Unterarten werden SN II-L (linear) und SN II-P (Plateau) genannt [Barbon *et al.*, 1979]. Die Spitzenwerte der absoluten Helligkeiten zeigen bei SN II-P eine breite Streuung, während die meisten SN II-L fast gleiche Maximalhelligkeiten besitzen.

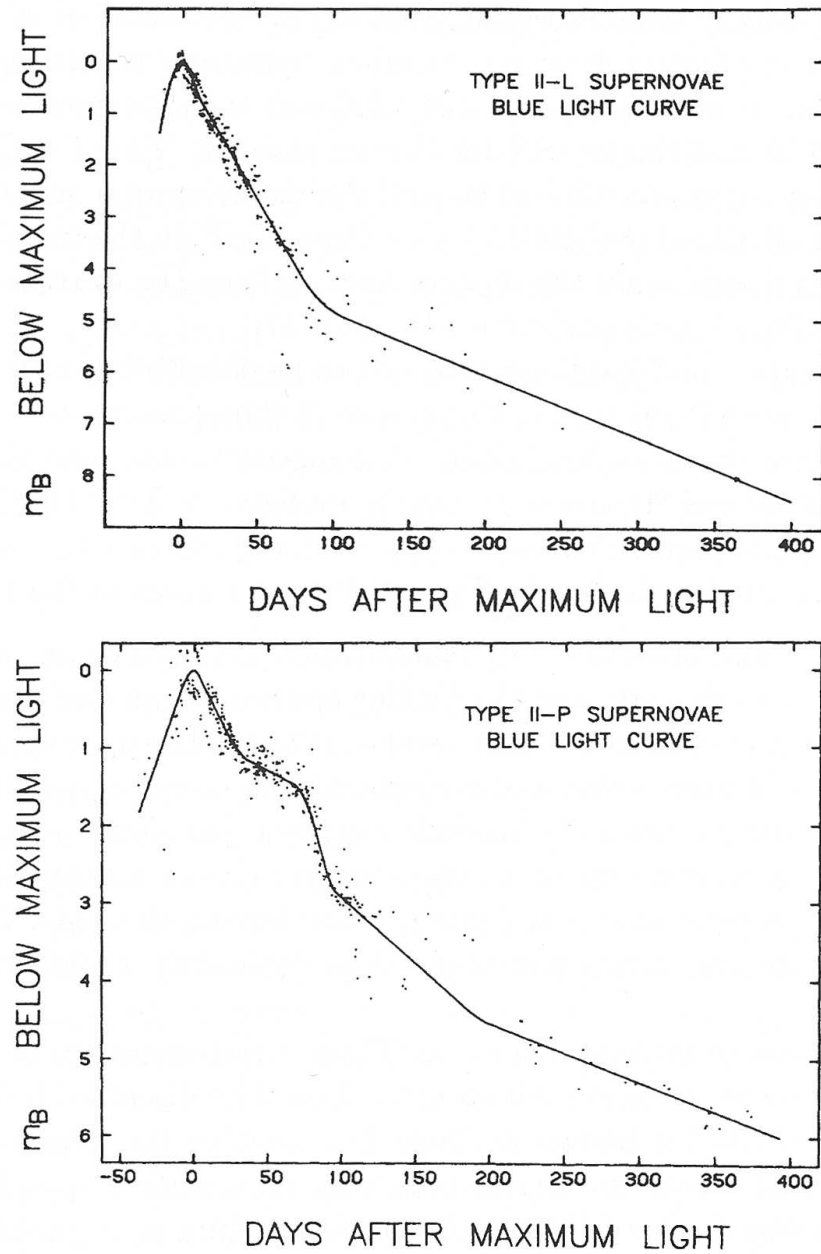
Die Existenz von Plateauphasen werden dadurch erklärt, dass die ausgestoßene Masse und damit die Geschwindigkeit der Hülle der Supernova sehr groß ist. Der Rückgang der Helligkeit aufgrund der Abkühlung wird durch die rasche Ausdehnung der Hülle wegen der dadurch vergrößerten Oberfläche kompensiert und die Lichtkurve wird durch ein Plateau beschrieben. Die maximalen Helligkeiten hängen dabei vom Radius des Vorgängersterns ab, wodurch die große Streuung in den Maximalhelligkeiten der SN II-P erklärt wird.

Supernovae vom Typ II-L haben geringere Expansionsgeschwindigkeiten, so dass ihre Helligkeit bereits in frühen Stadien von radioaktiven Prozessen bestimmt wird. Dadurch tritt eine geringere Streuung der Maximalhelligkeiten auf [Young und Branch, 1989].

SN II-L zeigen im Gegensatz zu SN II-P keine P-Cygni Profile der  $H_{\alpha}$ -Linie. Diese Unterscheidungsmöglichkeit ist jedoch rein phänomenologischer Natur [Petschek, 1990] [Schlegel, 1996] und es ist unklar, ob sie Bestand haben wird.

Zu frühen Zeiten zeigt das Spektrum einer SN II-P wenige Merkmale. Es ist im Blauen sehr leuchtkräftig, was eine hohe Temperatur oder geringe Opazität andeutet. Meist sind schwache Wasserstoff-Balmerlinien und He I ( $\lambda = 5876\text{\AA}$ ) zu sehen. Mit der Zeit kühlt sich die Atmosphäre ab, und starke Balmer- und Ca-II-Linien mit P-Cygni-Profilen sowie schwache Eisenlinien treten auf.

Zu späten Zeiten verschwindet das Kontinuum und das Spektrum geht in eine optisch dünne, nebelartige Phase mit einer starken  $H_{\alpha}$ -Linie über [Filippenko, 1997].



**Abbildung 2.3:**

Es sind Lichtkurven von Supernovae vom Typ II mit blauen scheinbaren Helligkeiten  $m_B$  dargestellt. Im oberen Teil sind SN II-L und im unteren SN II-P abgebildet. Die Daten stammen von mehreren Supernovae.

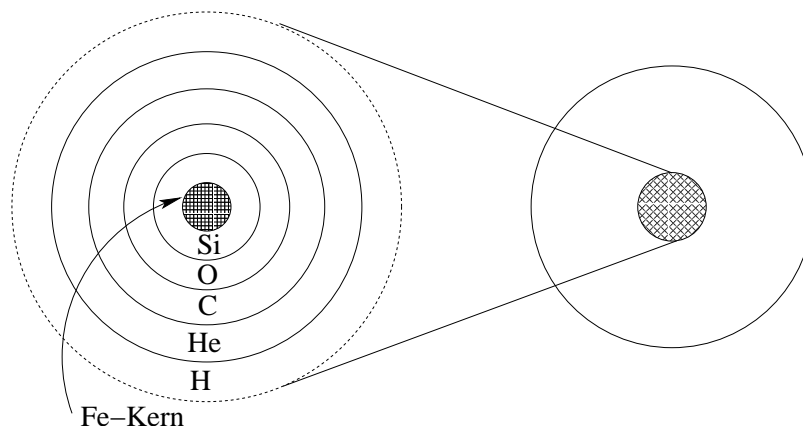
Die Abbildungen stammen aus [Doggett und Branch, 1985].

## 2.3 Mechanismus einer Supernova vom Typ II

Der physikalische Mechanismus, der zu einer SN II führt, ist im Detail noch nicht verstanden. Bereits 1934 brachten Baade und Zwicky [Baade und Zwicky, 1934] die von Landau<sup>3</sup> postulierten Neutronensterne mit dem Phänomen der Supernovae in Verbindung. Heute ist es allgemein akzeptiert, dass Supernovae SN II, SN Ib und SN Ic durch den Kollaps von Kernen in sehr massereichen Sternen entstehen. Die Anzahl an Neutrinos, die die momentane Theorie des Mechanismus von Supernovae vorhersagt, konnte beim Ausbruch der Supernova 1987A beobachtet werden (siehe A. Burrows in [Petschek, 1990]).

Die potentielle Energie, die beim Kollaps frei wird, erzeugt die Supernova, wobei ca. 99% der Energie durch Neutrinos abgeführt werden. Etwa 1% fließt in die kinetische Energie der Hülle. Nur der zehntausendste Teil der freigewordenen Energie wird in Form von Licht abgestrahlt. Die Energie von Supernovae wird in der Einheit foe (1foe =  $10^{51}$  ergs)<sup>4</sup> angegeben. Die Energie, die beim Kollaps zu einem Neutronenstern frei wird, ist daher in der Größenordnung von 100 foe.

Der Vorläufer einer SN II ist ein massereicher Stern, der sich am Ende seiner Entwicklung befindet. Die verschiedenen thermonuklearen Fusionsprozesse laufen in verschiedenen Schalen einer zwiebelartigen Struktur ab [Burbidge *et al.*, 1957] (siehe Abbildung 2.4).



**Abbildung 2.4:** Schalenbrennen eines schweren entwickelten Sterns. In seinem Zentrum hat sich bereits ein Eisenkern gebildet, der keine Energie mehr durch Fusion liefern kann.

Im innersten wurde Eisen synthetisiert. Eisen stellt wegen der Minimumeigenschaft der Bindungsenergie des Eisenatomkerns keine Energiequelle über den Mechanismus der Kernfusion mehr dar. Der Start einer weiteren Fusionskette mit Eisen bleibt daher ohne Erfolg. Ohne eine Energiequelle kontrahiert das Zentralgebiet unter der Gravitation.

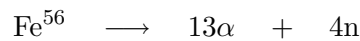
<sup>3</sup>Landau hatte nicht explizit von Neutronensternen gesprochen. Stattdessen hatte er allgemein über durch entartete Fermionen stabilisierte Sterne gearbeitet. Erst Baade und Zwicky sprachen von Neutronensternen.

<sup>4</sup>»foe« ist eine Abkürzung aus »fi ty one ergs«.

Bei Sternen, die nicht als Supernova enden, liegt die Masse des unter den vorherrschenden physikalischen Bedingungen nichtfusionierbaren Materials im Kern unterhalb der *Chandrasekhar-Grenzmasse*. In diesem Fall wirkt das Pauliprinzip der Gravitation entgegen und bringt die Kontraktion zum Stehen. Die Hülle wird als planetarischer Nebel abgestoßen und der Kern bildet einen Weißen Zwerg. Dies ist bei Sternen mit einer Gesamtmasse von unter  $8 M_{\odot}$  der Fall.

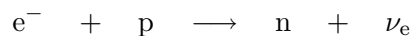
Bei Sternen mit einer größeren Masse wird die Fusionskette bis Eisen durchlaufen. Die Chandrasekhar-Masse des Eisenkerns wird überschritten und die Gravitation überwindet den Druck der entarteten Elektronen (siehe *i* in Abbildung 2.5).

Bei der Kontraktion finden mehrere Prozesse statt, die die Chandrasekhar-Grenzmasse erniedrigen. Zum einen tritt Photodissoziation des Eisens auf:



Die Entropie der Nukleonen steigt, wobei die dafür nötige Energie durch thermische Energie der Elektronen aufgebracht wird. Durch die Photodissoziation des Eisens sinkt daher der Elektronendruck.

Weiterhin kommt es zu Elektroneneinfang über:



Die Anzahldichte der Elektronen wird also kleiner. Dabei ist zu beachten, dass die Chandrasekhar-Grenzmasse vom mittleren Molekulargewicht abhängt:

$$M_{\text{Ch}} \propto (\mu_e)^{-2}$$

weswegen auch die Chandrasekhar-Grenzmasse kleiner wird. Nach J. Cooperstein und E. Baron in [Petschek, 1990] ergibt sich unter Berücksichtigung des Elektroneneinfangs:

$$M_{\text{Ch}} \approx 0.9 M_{\odot}$$

Der Druck der Nukleonen ist gegenüber dem der Elektronen vom Betrag her ungefähr zehnmal geringer [Bethe, 1990] [Petschek, 1990]. Die Elektronen sind auch innerhalb der Kerne homogen verteilt, so dass die Coulombenergie der gebundenen Nukleonen geringer ist als die der freien. Für die Kerne ist daher der Elektronenhintergrund anziehend. Der Druck der Kerne ist somit negativ [Bethe, 1990]. Bei Überschreiten der Grenzmasse fällt der positive Druck der entarteten Elektronen weg und der Gesamtdruck wird negativ. Bei negativem Druck wird die Entropie bei Verringerung des Volumens größer; der Kern kollabiert (siehe *ii* in Abbildung 2.5).

Der innere Teil des Eisenkerns ist so dicht, dass die Einfallgeschwindigkeit noch unter der Schallgeschwindigkeit bleibt. Der innere Teil des Kerns kollabiert somit selbständig, was bedeutet, dass sich nur die Skalen der Temperatur und Dichteverteilung ändern.

Der äußere Teil des Eisenkerns ist nicht dicht genug, so dass die Einfallgeschwindigkeit größer wird als die lokale Schallgeschwindigkeit. Dieser äußere Teil fällt als Schockwelle in Richtung des Zentrums.

Die Information über den Kollaps des Kerns erreicht wegen des Überschreitens der Schallgeschwindigkeit nicht die äußeren Schichten des Sterns, so dass diese Schichten zunächst

nicht auf den Kollaps reagieren können.

Der innere Kern kollabiert, bis die Dichte nukleares Niveau erreicht. Infolge der oben beschriebenen Prozesse kann man nicht mehr von einem Eisenkern sprechen, sondern vielmehr von einem Neutronenkern. Der Druck des entarteten Neutronengases ist wegen der größeren Wechselwirkungsenergie groß genug, um den Kollaps des Sterns aufzuhalten (siehe *iii* in Abbildung 2.5), wenn die Masse hinreichend klein ist. Denn für einen Neutronenstern existiert ebenfalls eine Grenzmasse [Landau und Lifschitz, 1987], deren Überschreiten einen Kollaps zu einem schwarzen Loch zur Folge hat. Diese Grenzmasse liegt bei ca.  $2.7 M_{\odot}$  und kann erreicht werden, falls der Vorläufer der Supernova eine Masse über  $20 M_{\odot}$  besessen hat.

Durch das Anhalten der Kontraktion entsteht im nachfallenden Material ein großer Druck. Diese Information breitet sich als Druckwelle nach außen aus. In der Nähe des stabilisierten Kerns ist die Dichte des Materials groß genug, so dass die lokale Schallgeschwindigkeit größer ist als die Geschwindigkeit der Druckwelle. Trifft die Druckfront auf die einfallenden weniger dichten Schichten, so wird die Schallgeschwindigkeit zu klein; es bildet sich eine Dichte- und Druckunstetigkeit aus. Es entsteht eine nach außen laufende Schockwelle (siehe *iv* in Abbildung 2.5).

Die Dichte eines Sternes nimmt nach außen hin ab. Gelangt die Schockwelle in eine Region mit geringerer Dichte, so wird die Energie der Stoßfront auf weniger Masse pro Volumen verteilt; die Energiedichte steigt (siehe *v* in Abbildung 2.5).

In der Stoßfront wird das Gas sehr stark komprimiert, so dass die Temperatur steigt. Je geringer die Dichte vor der Stoßfront ist, desto größer ist der Temperaturanstieg. Die Aufheizung des Gases wird weiter durch Absorption von Strahlung, die von der tieferliegenden heißen Schockfront ausgesendet wird, gefördert. Das schockartig erhitzte Gas dehnt sich rasch aus und gewinnt Geschwindigkeit vom Zentrum weg. Diese Geschwindigkeit wird umso größer, je geringer die Dichte des Gases vor der Schockfront ist. Die äußeren Schichten erhalten eine so große Geschwindigkeit, dass sie das Gravitationspotential verlassen können<sup>5</sup> [Zel'Dovich und Raizer, 1967].

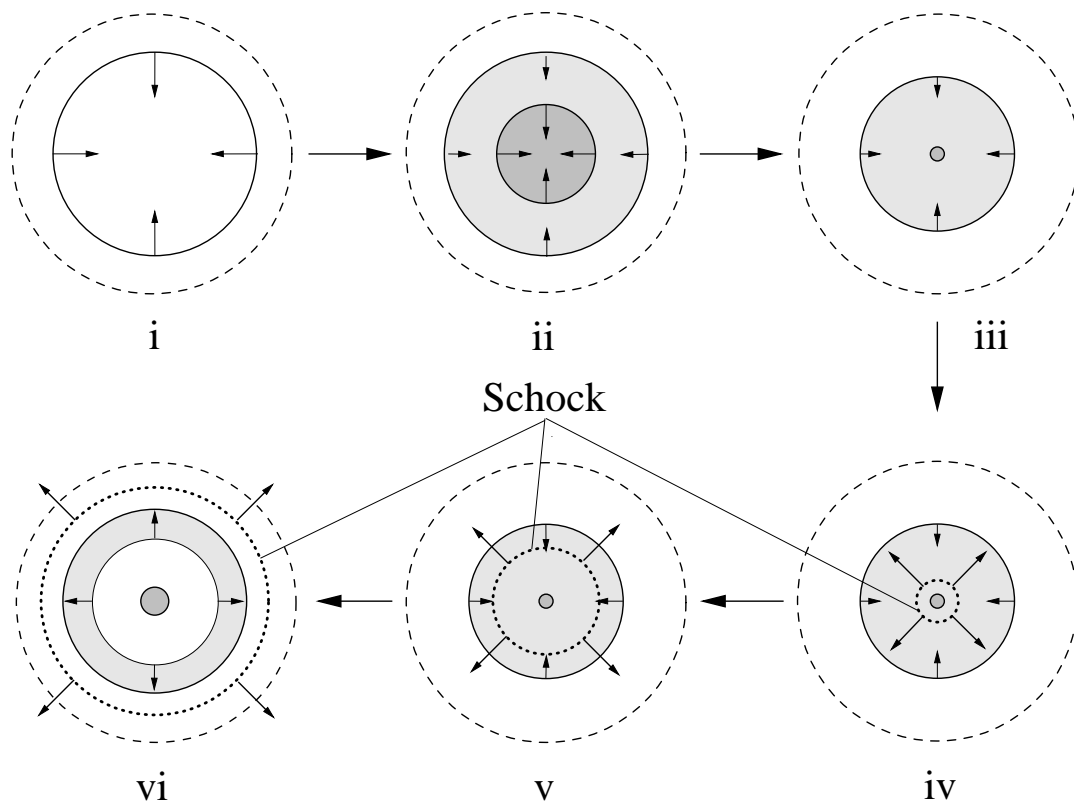
Nicht ausgestoßene Materie fällt auf den massiven Neutronenkern und bildet einen Neutronenstern (siehe *vi* in Abbildung 2.5).

Das restliche Material wird mit genügend hoher Geschwindigkeit ausgestoßen, so dass es aus dem Potentialtopf entkommt. Die Effekte der Hydrodynamik einer Explosion klingen rasch ab und das Material breitet sich annähernd kräftefrei, also gleichförmig aus. Wenn die Supernova beobachtet wird, ist die Strecke, die eine Masse zurückgelegt hat, einfach proportional zu ihrer Geschwindigkeit. Die Atmosphäre dehnt sich selbständig aus und das Geschwindigkeitsfeld der Atmosphäre nimmt linear mit dem Radius zu.

Die Problematik, die sich bei dieser Beschreibung des Mechanismus ergibt, besteht darin, dass in Ergebnissen von Simulationsrechnungen der Schock zu viel Energie verbraucht, so dass er den Rand des Sterns nicht erreicht. Die Energie wird sowohl dafür benötigt, die einfallenden Schichten in ihrer Bewegung umzukehren, als auch für die Umwandlung der

---

<sup>5</sup>Es zeigt sich das die Energie des Schocks hierfür nicht ausreicht. Der Schock wird erst durch die Absorption von Neutrinos wiederbelebt (siehe unten).



**Abbildung 2.5:** Entstehungsvorgang der Schockwelle, die zu einer Supernova führt.

- (i) Der Kollaps beginnt.
- (ii) Der innere Teil des Eisenkerns (dunkel) kollabiert selbständig. Der äußere Teil (hell) fällt geschockt in das Zentrum.
- (iii) Der Entartungsdruck der Neutronen stoppt den Kollaps.
- (iv) Die Druckwelle wird zu einer Schockwelle.
- (v) Die Schockwelle breitet sich nach außen hin aus und erhitzt das durchlaufene Gas sehr stark.
- (vi) Das erhitzte Gas entkommt dem Gravitationspotential. Nicht ausgestoßene Materie fällt auf den Neutronenkern zurück. Es bildet sich ein Neutronenstern.

Kerne in Neutronen, da Dichten in nuklearer Größenordnung erreicht werden. Außerdem steht nicht die gesamte freigewordene potentielle Energie für den Schock zur Verfügung. Ungefähr 99% der Energie wird durch Neutrinos abgeführt. Aufgrund ihres geringen Wirkungsquerschnittes können die Neutrinos leicht entkommen. Dies gilt jedoch nur, falls die Dichte des durchlaufenen Materials hinreichend gering ist.

Für die Dynamik des Schocks sind die Neutrinos daher von entscheidender Bedeutung. Der Wirkungsquerschnitt von schnellen Neutrinos ist größer als der von langsamen (A. Burrows in [Petschek, 1990]) und an der Stoßfront ist die Dichte des Materials so groß, dass ein beachtlicher Teil der Neutrinos mit der Stoßfront in Wechselwirkung treten kann. Die Neutrinos deponieren Impuls und Energie in der Stoßfront, wodurch diese beschleunigt wird. Detaillierte Rechnungen zeigen, dass durch den Mechanismus der Neutrinoheizung die Reichweite



des Schocks gesteigert wird, aber dennoch keine Supernovaexplosion herbeigeführt werden kann [Liebendörfer *et al.*, 2004].

Eine Supernovaexplosion ohne den Antrieb der Neutrinos wird direkter oder prompter Mechanismus genannt, während man bei dem neutrinogetriebenen Schock von einem verzögerten Mechanismus spricht.

Mit der bisherigen Theorie der Supernovae gelingt es nicht, die beobachteten Supernovae quantitativ zu erklären. Es herrscht jedoch in der Wissenschaft ein wachsender Konsens darüber, dass Supernovae über den verzögerten Mechanismus explodieren. Der Grund des Scheiterns der bisherigen Theorie scheint in der zu stark vereinfachten Behandlung des Neutrino-transportes zu liegen. Die Untersuchung des Problems mit fortgeschritteneren Algorithmen wird zeigen, ob der jetzige Konsens zutreffend ist.

## 2.4 Die Nukleosynthese in Supernovae

Während der Supernovaexplosion werden riesige Energiemengen freigesetzt. Der Hauptanteil liegt in den Neutrinos, während die kinetische Energie der Hülle und die Ausstrahlung von Licht den Rest ausmachen [Petschek, 1990].

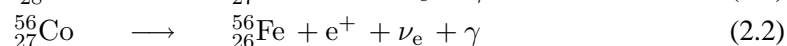
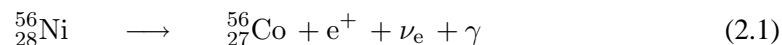
In der Supernovahülle herrschen daher extreme physikalische Bedingungen, in denen die Voraussetzungen für Nukleosynthese nicht nur durch Fusion, sondern auch durch von Neutronen bedingten Prozessen erfüllt sind [Burbidge *et al.*, 1957].

Ist die Stoßrate und damit auch die Rate des Einfangens von Neutronen in Atomkernen sehr hoch, so sind die Voraussetzungen dafür geschaffen, dass der *r*-Prozess ablaufen kann. Bei diesem Prozess werden Neutronen in Atomkernen eingefangen und dadurch schwere Kerne erzeugt. Durch  $\beta$ -Zerfall werden anschließend höhere Kernladungszahlen erreicht. Die Bezeichnung *r*-Prozess rührt daher, dass die Aufnahme von Neutronen gegenüber Zerfallsprozessen *rasch* geschehen muss [Woosley *et al.*, 1994].

Bei einer großen Neutrino-Leuchtkraft spielt ebenfalls der  $\nu$ -Prozess eine wichtige Rolle, da hierbei Neutrinos bestehende Heliumkerne zerschlagen können. Die entstehenden  $^3\text{H}$  und  $^3\text{He}$  Kerne fusionieren dann unter anderem mit Heliumkernen weiter zu schwereren Elementen [Woosley *et al.*, 1990].

Einige der erzeugten Elemente sind radioaktiv. Das bedeutet, dass ihre durch Zerfallsprozesse freigesetzte Strahlung und Elektronen Einfluss auf die Spektren im optischen Spektralbereich haben können.

Das wichtigste entstehende Isotop ist  $^{56}_{28}\text{Ni}$ . Entlang den Zerfallsketten:



entsteht aus dem Nickel zunächst Kobalt, das weiter zu Eisen zerfällt.  $^{56}_{28}\text{Ni}$  zerfällt mit der Halbwertszeit  $\tau_{1/2} = 6.1$  Tage. Die Halbwertszeit von  $^{56}_{27}\text{Co}$  beträgt dagegen  $\tau_{1/2} = 77.7$  Tage [Carroll und Ostlie, 1996].

Die aus der Nickelzerfallskette freiwerdende Energie wird in der für  $\gamma$ -Strahlung optisch dicken Supernovahülle deponiert und von dieser abgestrahlt.

Die aus diesen Prozessen freiwerdende Energie hat einen großen Einfluss auf die Gestalt und Entwicklung von Lichtkurven.

Bei SN II-P trägt die Radioaktivität dazu bei, das Plateau in der Lichtkurve zu erhalten oder sogar ein zweites Maximum zu erzeugen. In SN II-L wird sogar die gesamte Helligkeitsentwicklung durch Radioaktivität beeinflusst. Die Lichtkurve aller SN II werden in späten Phasen durch radioaktive Prozesse bestimmt [Young und Branch, 1989].

Die Elementhäufigkeiten in den verschiedenen Schichten des Supernovavorgängers werden zunächst durch das stabile Schalenbrennen bestimmt. Die Häufigkeiten variieren von Schicht zu Schicht stark.

Beim Durchlauf der Schockwelle durch die Hülle werden sowohl die Schichten mit verschiedenen Elementhäufigkeiten durch Rayleigh-Taylor-Instabilitäten vermischt, als auch die Häufigkeiten durch den  $r$ - und  $\nu$ -Prozess verändert. In Supernovae vom Typ II kann von einer annähernd gleichmäßigen Verteilung der Elemente in den optisch dicken Schichten ausgegangen werden.

Supernovae stellen einen wichtigen Mechanismus bereit, um durch Kernprozesse entwickeltes Material an das interstellare Medium abzugeben. Nur durch Supernovae werden schwere Elemente in den Prozess der Sternentstehung einbezogen. Erst durch Supernovae wurde das Leben, wie wir es kennen, möglich. So ist z.B. das Eisen in unserem Blutfarbstoff in einem Vorläuferstern einer Supernova produziert worden.

Supernova haben daher einen großen Einfluss auf die chemische Entwicklung des Universums.

## Kapitel 3

# Spektrenbildung in Atmosphären

Bei einer Supernovaexplosion werden heiße, Licht aussendende Gasmassen in den Raum geschleudert. Das Licht kann dieses Gas aber nicht frei durchqueren; es kann das Gas nur von Orten aus verlassen, die nah genug am Übergang zwischen Gas und interstellarem Medium sind. Diese Übergangszone ist die Atmosphäre der Supernova. Sie überspannt die Gebiete des Gases, in denen sich das Licht nicht wechselwirkungsfrei bewegen kann und solche, in denen es dem Gas entkommt.

Die Theorie, die die Ausbreitung des Lichts durch eine Atmosphäre beschreibt, ist der Strahlungstransport.

Diese Theorie ist sehr allgemein und kann prinzipiell auf jede Atmosphäre angewendet werden. Gegenüber einer Sternatmosphäre ist die Atmosphäre einer Supernova jedoch in Bewegung. Die Supernova-Atmosphäre expandiert, so dass eine allgemeinere Theorie des Strahlungstransports benötigt wird als die, die in statischen Sternatmosphären zur Anwendung kommt. Hierbei handelt es sich um den Strahlungstransport in bewegten Medien.

In diesem Kapitel werden wichtige Grundlagen und Erkenntnisse der Theorie des Strahlungstransports behandelt. Zunächst wird auf die Gültigkeit von thermodynamischen Annahmen eingegangen und ein Überblick über die das Strahlungsfeld beschreibenden Größen gegeben. Des Weiteren wird das Verhalten dieser Größen unter der Annahme von sphärischer Symmetrie, sowie die Wechselwirkung von Strahlung mit Materie beschrieben.

Dies führt schließlich auf die analytische Beschreibung des Transports von Strahlung.

### 3.1 Gültigkeit von thermodynamischen Näherungen

Bei der makroskopischen Beschreibung von Prozessen in Gasen vereinfacht die Annahme eines lokalen thermodynamischen Gleichgewichts die beschreibende Theorie sehr.

Die Gültigkeit dieser Annahme ist aber nicht für jede Atmosphäre gegeben. Bei der Diskussion der Gültigkeit werden die Begriffe *LTE* und *NLTE* verwendet.

*LTE* und *NLTE* sind Akronyme aus den englischen Bezeichnungen »local thermodynamic equilibrium<sup>1</sup>« und »non-local thermodynamic equilibrium<sup>2</sup>«.

---

<sup>1</sup>dt.: Lokales thermodynamisches Gleichgewicht.

<sup>2</sup>dt.: Nicht lokales thermodynamisches Gleichgewicht.

Man spricht von LTE in einem Punkt eines Mediums, falls alle Verteilungsfunktionen der Teilchen im Medium durch eine Temperatur charakterisiert werden können. Dies bedeutet, dass in dem betrachteten Gebiet eine Gibbsche Verteilung existiert, weswegen das Gebiet als abgeschlossen betrachtet werden kann [Landau und Lifschitz, 1987]. Das LTE ist also nur lokal gültig. Da ein Stern nicht abgeschlossen ist, kann er als Stern auch niemals in ein vollständiges thermisches Gleichgewicht kommen.

Im NLTE gibt es keine Gibbsche Verteilung. Das bedeutet, dass der gesamte Stern auf ein betrachtetes Gebiet Einfluss nehmen kann. So beeinflusst z.B. das Photonengas die lokalen physikalischen Prozesse. Man kann ein Gebiet im Stern nicht als abgeschlossen betrachten.

Genaugenommen kann es aufgrund der Natur eines Sternes keine Gebiete in seinem Inneren geben, in denen LTE herrscht.

Je nach gegebenen physikalischen Bedingungen kann das LTE jedoch eine gute Näherung sein. Dies gilt immer dann, wenn die Rate der Kollisionen der Teilchen sehr viel größer als die Rate der Photonwechselwirkungen ist. Denn sind unelastische Stöße im Medium sehr viel häufiger als die Wechselwirkungen mit den Photonen, werden die Mittelwerte der Größen des lokalen Ensembles von den lokalen Bedingungen dominiert.

Daher ist LTE häufig in Situationen mit einem großen Druck gültig, aber nur, wenn die physikalischen Gegebenheiten so sind, dass die Kollisionsraten die Photonwechselwirkungsrate dominieren [Mihalas, 1970].

Im Zuge einer LTE-Betrachtung wird häufig von einem detaillierten Gleichgewicht gesprochen. Im Allgemeinen bedeutet dies, dass das Phasenraumintegral einer Verteilungsfunktion unter einer Zeitinversion invariant bleibt. Im Falle des Photonengases bedeutet dies, dass jeder Wechselwirkungsprozess von Photonen genau durch seinen Gegenprozess kompensiert wird.

Sowohl LTE als auch NLTE beziehen sich immer auf materielle Teilchen. Ein Photonengas kann zwar äquivalent beschrieben werden, doch gibt es keine physikalischen Situationen, in denen ein isotropes, planckverteiltes Photonengas in offenen Systemen entweicht. Es macht daher keinen Sinn, im Zusammenhang mit offenen Systemen (Sternen) von LTE im Photonengas zu sprechen.

Im Zusammenhang mit der Entstehung des Spektrums spielt das NLTE eine Rolle. Die Besetzungszahlen werden nicht durch eine temperaturabhängige Verteilungsfunktion bestimmt, sondern hängen über An- und Abregprozesse mit dem Strahlungsfeld zusammen und beeinflussen es daher auch. Die Beschreibung des Strahlungsfeldes und der Besetzungszahlen muss daher selbstkonsistent geschehen.

Das Elektronengas befindet sich in allen für den Strahlungstransport relevanten Situationen im LTE, so dass die Kontinuumsübergänge (frei-frei-Absorption und -Emission) mit der LTE-Rate mit lokalen Temperaturen und Dichten berechnet werden können.

In analytischen Ausdrücken treten häufig sowohl die wahren Besetzungszahlen  $n_i$  als auch die »LTE«-Besetzungszahlen  $n_i^*$  des Zustandes  $|i\rangle$  auf. Die  $n_i^*$  gehorchen der statistischen Beschreibung, die im LTE gilt, wobei es sich bei allen anderen in der Statistik auftretenden Besetzungszahlen um die wahren Besetzungszahlen  $n_i$  handelt. Das Verhältnis dieser beiden

Zahlen wird als Abweichungskoeffizient  $b_i$  bezeichnet:

$$b_i = \frac{n_i}{n_i^*}$$

Dieser Koeffizient ist ein Maß dafür, wie weit das betrachtete System davon entfernt ist, im LTE zu sein. Geht  $b_i$  gegen eins, so sind die Abweichungen vom LTE sehr gering. Ist  $b_i$  deutlich größer oder kleiner als eins, so sind die Abweichungen vom LTE groß und das System befindet sich im NLTE.

Mittels der  $b_i$  lassen sich formal wahre Besetzungszahlen durch die LTE-Besetzungszahlen ausdrücken. Die mathematischen Beziehungen des LTE werden dann zur formalen Vereinfachung genutzt.

Das Verhältnis von Besetzungszahlen  $n$  von Anregungszuständen der Ionen werden im LTE durch die Boltzmann-Formel beschrieben:

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp\left(-\frac{E_{ij}}{kT}\right) \quad (3.1)$$

Dabei sind  $g_i$  und  $g_j$  die statistischen Gewichte des jeweiligen Zustands,  $E_{ij}$  die Energiedifferenz zwischen den beiden Zuständen,  $k$  die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur.

Die Besetzungszahl  $n_i^*$  ist über die wahre NLTE Besetzungszahl des Grundzustands der nächsthöheren Ionisationsstufe  $n_\kappa$  definiert:

$$n_i^* = \frac{1}{2} \frac{g_i}{g_\kappa} \frac{n_\kappa n_e h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{E_{i\kappa}}{kT}\right) \quad (3.2)$$

Hierbei ist  $n_e$  die Elektronendichte,  $h$  die Plancksche Wirkungskonstante und  $m_e$  die Elektronenmasse.

Eine Supernovahülle dehnt sich aus und die verschiedenen Gebiete stehen über das Strahlungsfeld miteinander in Verbindung, weswegen Streuung eine wichtige Rolle spielt. Eine Supernova-Atmosphäre ist daher eindeutig im NLTE.

## 3.2 Beschreibung des Strahlungsfeldes

Das Strahlungsfeld ist bei der Kenntnis der physikalischen Eigenschaften aller beteiligten Photonen bekannt. Eine solche mikroskopische Beschreibung ist jedoch nicht sinnvoll, da die beobachtbaren Größen wie der Strahlungsstrom makroskopisch sind und somit eine individuelle Betrachtung von Photonen unnötig ist.

Außer bei der Wechselwirkung mit Materie sind quantenmechanische Effekte der Photonen ebenfalls unwichtig, so dass das Strahlungsfeld mit klassischen Feldern beschrieben werden kann.

Nach [Mihalas und Weibel Mihalas, 1984] beschreibt eine Verteilungsfunktion im Phasenraum und in der Zeit die Strahlung vollständig, wenn das Strahlungsfeld als ein Gas aus Photonen betrachtet wird.

$$f = f(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

Aufgrund der de-Broglie-Beziehung für Photonen

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}$$

besteht ein Zusammenhang zwischen der Energie eines Photons und seines Impulses. Statt einer Darstellung im Impulsraum ist also auch eine Darstellung im Energieraum möglich. Da die de-Broglie-Beziehung skalar ist, geht die Richtungsinformation in der Energiedarstellung verloren und muss als weiteres Argument  $\vec{n}$  hinzugefügt werden.

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p} = c^2 \frac{I(\vec{x}, \nu, \vec{n}, t) d\nu d\Omega}{h^4 \nu^3} \quad (3.3)$$

Das neue skalare Feld ist die *spezifische Intensität*  $I$ . Sie beschreibt an einem Raumpunkt die Ausbreitung von Energie durch eine Einheitsfläche in einen Raumwinkel um eine feste Richtung pro Frequenz- und Zeitintervall:

$$dE = I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) dA \cos \theta d\nu d\Omega dt$$

Die Darstellung im Frequenzraum ist isomorph zu der Darstellung im Wellenlängenraum. Physikalisch sind  $I_\nu$  und  $I_\lambda$  äquivalent.

Relativistische Effekte werden mit Hilfe von Tensorrelationen beschrieben. Bei der Betrachtung von bewegten Atmosphären — z.B. bei Supernovae oder Novae — sind relativistische Effekte relevant, da die erreichten Geschwindigkeiten in den Bereich von Prozenten der Lichtgeschwindigkeit kommen.

Für das Problem des Strahlungstransports kann man den kanonischen Formalismus klassischer Feldtheorien [Landau und Lifschitz, 1997] für den Energieimpulstensor anwenden.

Nach [Mihalas und Weibel Mihalas, 1984] lautet der Energieimpulstensor des Photonengases (siehe Anhang (A.6)):

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & \frac{\vec{F}}{c} \\ \frac{\vec{F}}{c} & P^{ij} \end{pmatrix}$$

$E$  ist die totale Strahlungsenergiedichte:

$$E = \int E_\nu d\nu \quad (3.4)$$

$$E_\nu = \frac{1}{c} \oint_{\partial V} I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) dA = \frac{1}{c} \oint I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) d\Omega \quad (3.5)$$

$E_\nu$  ist die monochromatische Energiedichte. Sie hängt eng mit der monochromatischen mittleren Intensität  $J_\nu$  zusammen.

$$J_\nu = \frac{c}{4\pi} E_\nu$$

Weiterhin ist  $\vec{F}_\nu$  der monochromatische Strahlungsfluss. Über alle Frequenzen summiert ergibt sich hieraus der integrierte Strahlungsfluss  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = \int \vec{F}_\nu d\nu \quad (3.6)$$

$$\vec{F}_\nu = \oint_{\partial V} I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) d\vec{A} = \oint I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) \vec{n} d\Omega \quad (3.7)$$

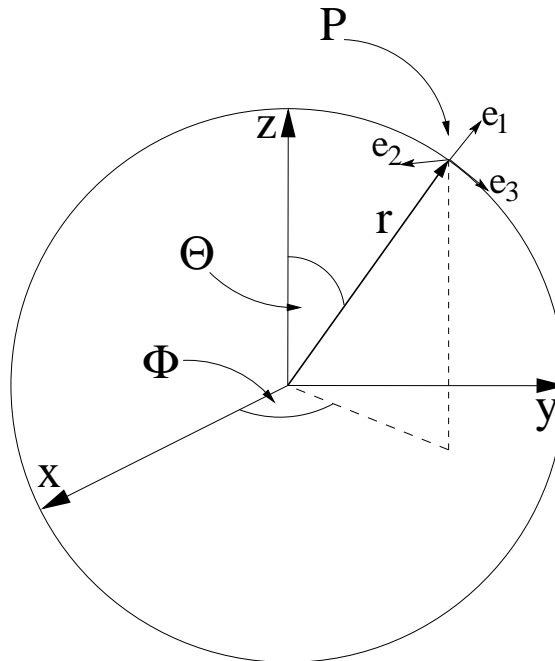
$P^{ij}$  ist der totale Strahlungsspannungstensor. Differentiation nach  $\nu$  ergibt den monochromatischen Strahlungsspannungstensor  $P_\nu^{ij}$ :

$$P^{ij} = \int P_\nu^{ij} d\nu \quad (3.8)$$

$$P_\nu^{ij} = \frac{1}{c} \oint_{\partial V} I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) \vec{n} \otimes \vec{n} dA = \frac{1}{c} \oint I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) \vec{n} \otimes \vec{n} d\Omega \quad (3.9)$$

### 3.3 Das Strahlungsfeld in sphärischer Symmetrie

Wird für die Supernova eine sphärische Topologie angenommen, so wählt man als Koordinatensystem zur Beschreibung von Punkten in der Atmosphäre Kugelkoordinaten (siehe Abbildung 3.1).



**Abbildung 3.1:** Krummliniges Koordinatensystem zur Beschreibung von Punkten in der Supernovahülle.

Jeder Punkt der Atmosphäre wird durch drei Koordinaten beschrieben:

$$P = (x_1, x_2, x_3) = (r, \Theta, \Phi)$$

Dabei ist  $r$  der Radius,  $\Theta$  der Polarwinkel und  $\Phi$  der Azimutalwinkel. In diesem Punkt lässt sich ein lokales orthogonales Koordinatensystem  $(y_1, y_2, y_3)$  durch Anwendung von Differentialoperatoren bestimmen. Die Einheitsvektoren ergeben sich aus:

$$\vec{e}_i = \left. \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \right|_P$$

Die Propagationsrichtung  $\vec{n}$  wird in diesem Koordinatensystem mittels zweier Winkel ( $\theta$  und  $\phi$ ) beschrieben. Die Länge des beschreibenden Vektors ist irrelevant, weswegen die radiale Komponente normiert wird.

Dies bedeutet, dass die Intensität  $I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t)$  in sphärischer Geometrie mittels  $I_\nu(r, \Theta, \Phi, \theta, \phi, t)$  beschrieben wird.

Gehorcht die physikalische Struktur der Atmosphäre der sphärischen Symmetrie, so vereinfacht sich die Beschreibung der spezifischen Intensität erheblich. Jeder Punkt mit gleichem Radius ist physikalisch gleichwertig.

Weiterhin wird das Strahlungsfeld unabhängig von  $\phi$ . Denn wird eine beliebige, aber feste Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$  an einem Punkt in der Atmosphäre betrachtet und die  $\phi$ -Komponente von  $\vec{n}$  variiert, so entspricht diese Änderung der lokalen Azimutalkomponente einer Änderung der lokalen Basisvektoren  $\frac{\partial}{\partial \Theta}$  und  $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ . Eine Variation von  $\phi$  ist daher Variationen in  $\Theta$  und  $\Phi$  äquivalent, die wegen der sphärischen Symmetrie verschwinden. Das lokale Strahlungsfeld hängt daher nicht von  $\phi$  ab.

Bei angenommener sphärischer Geometrie des Problems reduziert sich die Beschreibung der Intensität daher auf  $I_\nu = I_\nu(r, \theta, t)$ . Die in Abschnitt 3.2 angegebenen Felder, die nun von  $I_\nu = I_\nu(r, \theta, t)$  abhängen, vereinfachen sich ebenfalls. Die Integration über  $\phi$  kann ohne Kenntnis der Intensität durchgeführt werden.

In der Literatur wird bei der Beschreibung der Winkelabhängigkeit nicht der Winkel  $\theta$  sondern sein Kosinus verwendet. Durch Definition von  $\mu = \cos(\theta)$  ergibt sich im Folgenden für die obigen Größen (3.5), (3.7) und (3.9):

$$E = \int E_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int d\nu \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) d\mu \quad (3.10)$$

$$\vec{F}_\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z(\nu) \end{pmatrix} = 2\pi \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_\nu(r, \mu)\mu \end{pmatrix} d\mu \quad (3.11)$$

$$F_z(\nu) = F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu)\mu d\mu \quad (3.12)$$

Eine nützliche Definition sind die Momente des Strahlungsfeldes:

$$[J_\nu(r), H_\nu(r), K_\nu(r)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) [1, \mu, \mu^2] d\mu \quad (3.13)$$

$$[J(r), H(r), K(r)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \int_{-1}^1 I_\nu(r, \mu) [1, \mu, \mu^2] d\mu \right) d\nu \quad (3.14)$$

Die Potenz von  $\mu$  bestimmt dabei die Ordnung des Moments. Das Moment nullter Ordnung  $J_\nu$  entspricht der mittleren Intensität, während das Moment erster Ordnung  $H_\nu$  Eddingtonfluss heißt:

$$H_\nu(r) = \frac{1}{4\pi} F_z(\nu, r)$$



Das zweite Moment  $K_\nu$  wird auch das K-Integral genannt, das bei dem sphärischsymmetrischen Strahlungsspannungstensor auftritt:

$$P_\nu^{ij} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(J_\nu - K_\nu) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(J_\nu - K_\nu) & 0 \\ 0 & 0 & K_\nu \end{pmatrix}$$

Der Strahlungsenergiespannungstensor in Kugelkoordinaten ergibt sich nach Umsortierung der kartesischen Achsen und durch Transformation des kartesischen Tensors mittels der Metrik der Kugelkoordinaten zu (siehe (A.9)):

$$T^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} J & H & 0 & 0 \\ H & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(J-K)}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(J-K)}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.4 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

Tief in der Atmosphäre der Supernova kann die Strahlung das Medium nicht frei passieren, sondern wird vollständig absorbiert, so dass das Spektrum der Strahlung dem eines schwarzen Körpers entspricht. Die individuelle Betrachtung von Photonprozessen wird immer wichtiger, je weiter außen in der Atmosphäre ein Punkt betrachtet wird, da die Näherung der völligen Absorption eines schwarzen Körpers nicht mehr gültig ist.

Für die Betrachtung von Photonwechselwirkungen werden die Häufigkeiten der vorkommenden Elemente, ihre Ionisationsgrade, die Besetzungszahlen aller Niveaus und die Opazitäten aller beteiligten Ionen benötigt.

Die Supernova-Atmosphäre befindet sich in einem extremen NLTE Zustand. Daher sind die Ionisierungsgrade und Besetzungszahlen nicht über die Boltzmann- und Saha-Gleichungen als Funktion der Temperatur bestimmbar. Sie müssen, da das Strahlungsfeld von ihnen abhängt, gleichzeitig über Ratengleichungen bestimmt werden.

In der Ratengleichung werden alle Prozesse berücksichtigt, die das betrachtete Niveau ent- oder bevölkern. Dabei spielen radiative und Kollisionsübergänge eine große Rolle, doch auch nichtthermische Beiträge aus radioaktiven Zerfallsprozessen tragen dazu bei.

#### 3.4.1 Extinktion und Emission

Die Prozesse, die bei der Wechselwirkung von Materie mit Strahlung eine Rolle spielen, werden grundlegend danach unterschieden, ob sie dem Strahlungsfeld Energie zuführen oder entziehen.

Bei der Betrachtung eines Lichtrahles im Strahlungsfeld werden energieabführende Prozesse Extinktion, energiezuführende Prozesse dagegen Emission genannt.

Makroskopisch werden die Extinktion als Summe von Produkten aus Wirkungsquerschnitten mit Besetzungszahlen, und die Emission als Summe von Produkten aus oberen Niveaubesetzungszahlen mit entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten in Koeffizienten zusammengefasst.

Die Extinktion wird weiterhin nach Streuung und Absorption unterschieden. Bei einer Streuung wird ein Photon kurzzeitig absorbiert, aber fast sofort wieder mit einer meist etwas geänderten Energie in eine andere Richtung emittiert. Bei einer Absorption wird das Photon dagegen zerstört. Streuprozesse koppeln in der Summe nicht an die lokale Gastemperatur, während bei der Absorption die Energie direkt an das Gas abgegeben wird.

Emission setzt sich aus thermischer Emission und in den betrachteten Energiebereich gestreuten Photonen zusammen.

Beide grundlegenden Prozesse sind in Medien ohne ausgezeichneter Richtung wie z.B. statische Medien isotrop, zeigen aber in Medien mit ausgezeichneten Richtungen — wie z.B. bewegte Medien wegen des Dopplereffektes der Photonen — eine Richtungsabhängigkeit. Wählt man für die Beschreibung des Strahlungstransports in bewegten Medien die Beschreibung im mitbewegten System, so sind die Extinktion und Emission wieder isotrop.

Der makroskopische Koeffizient der Extinktion  $\chi$  beschreibt die Menge an Energie, die aus dem Lichtstrahl entfernt wird:

$$dE = \chi_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) I_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) dA ds d\Omega d\lambda \quad (3.16)$$

Wegen der Unterscheidung der Extinktion nach Streuung  $\sigma$  und Absorption  $\kappa$  ist die Extinktion formal gegeben durch:

$$\chi_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) = \sigma_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) + \kappa_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) \quad (3.17)$$

Der makroskopische Koeffizient der Emission  $\eta$  beschreibt die Menge an Energie, die dem Lichtstrahl zugefügt wird:

$$dE = \eta_\lambda(\vec{x}, \vec{n}) dA ds d\Omega d\lambda \quad (3.18)$$

Die Koeffizienten werden entweder auf Einheitsvolumina oder auf Einheitsmassen bezogen. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen ist durch die Dichte  $\rho$  gegeben.

$$\eta_{\text{Masse}} \equiv \rho \eta_{\text{Volumen}}$$

Die Emission ist nicht proportional zur spezifischen Intensität. Der Prozess der stimulierten Emission ist jedoch der Intensität proportional. Die stimulierte Emission wird daher der Extinktion zugerechnet, da diese der Intensität proportional ist. Diese wird dabei als negative Absorption aufgefasst.

Die Beschreibung der Wechselwirkung von Strahlung und Materie gelingt nur formal auf so einfache Weise. Denn Prozesse wie Photoionisation und gebunden-gebunden-Übergänge verändern die Besetzungszahlen. Diese bestimmen mit den zugehörigen Wirkungsquerschnitten die Extinktion und die Emission. Die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie ist also nichtlinear.

Solange die Näherung des LTE gültig ist, sind die Besetzungszahlen ohne Kenntnis des Strahlungsfeldes bestimmt (siehe Abschnitt 3.1). In Atmosphären, in denen wegen der Wichtigkeit der Streuung NLTE herrscht, müssen daher die Besetzungszahlen und der Strahlungstransport gleichzeitig und selbstkonsistent berechnet werden (siehe Abschnitt 3.5).

### 3.4.2 Streuung

Bei einer Streuung wird das Photon nicht vernichtet, sondern sofort wieder emittiert, wobei sich sowohl seine Energie als auch seine Richtung ändern können.

Die Streuung eines Photons mit den Eigenschaften  $(\vec{n}', \nu', \Omega')$  nach  $(\vec{n}, \nu, \Omega)$  wird mit einer normalisierten Wiederverteilungsfunktion  $R$  beschrieben [Mihalas, 1978]:

$$\oint \oint \int \int R(\nu', \nu, \vec{n}', \vec{n}) d\nu' d\nu \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{d\Omega}{4\pi} = 1 \quad (3.19)$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Emission oder Absorption ist bei gegebenen physikalischen Bedingungen von der betrachteten Frequenz abhängig. Die Wiederverteilungsfunktion wird genutzt, um diese funktionalen Abhängigkeiten auszudrücken.

Die Absorptionsprofilfunktion  $\Phi(\nu')$  ergibt sich durch Integration über die auslaufenden Frequenzen  $\nu$  und alle Raumwinkel. Die Emissionsprofilfunktion  $\Psi(\nu)$  ergibt sich dementsprechend durch Integration über die einfallenden Frequenzen  $\nu'$  und alle Raumwinkel. Die Profildfunktionen sind aufgrund der Eigenschaften von  $R$  normiert.

Die Wiederverteilungsfunktion enthält also die Information über die Frequenzabhängigkeit der Absorption und der Emission. Bei gegebener Intensität und Wirkungsquerschnitt schreibt sich die Emission durch Streuung:

$$\eta(\vec{x}, \nu, \vec{n}) d\nu d\Omega = d\nu d\Omega \oint \int \sigma I(\vec{x}, \nu', \vec{n}) R(\nu', \nu, \vec{n}', \vec{n}) d\nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} \quad (3.20)$$

Die Profildfunktionen setzen sich aus mehreren Anteilen verschiedener Wechselwirkungen zusammen. Zum einen trägt die Linienstreuung und zum anderen die Thomson-Streuung an freien Elektronen und die Rayleigh-Streuung zu ihr bei.

Die Thomson-Streuung ist für nichtrelativistische Elektronen nicht frequenzabhängig, während die Rayleigh-Streuung mit  $\nu^4$  frequenzabhängig ist. Die Frequenzabhängigkeit der Linienprofile wird von den gegebenen lokalen physikalischen Gegebenheiten wie Druck und Temperatur bestimmt (siehe Abschnitt 3.4.3).

Den Anteil von  $R$ , der die räumliche Wiederverteilung beschreibt, ist die Phasenfunktion  $g(\vec{n}, \vec{n}')$ . In den meisten Fällen betrachtet man isotrope Streuung, so dass  $g \equiv 1$  gilt. Für die Thomson- und Rayleigh-Streuung gilt dagegen  $g(\vec{n}, \vec{n}') = 3/4(1 + (\vec{n} \cdot \vec{n}')^2)$ .

Weiterhin wird in den meisten Fällen eine über alle Winkel gemittelte Wiederverteilungsfunktion  $R(\nu', \nu)$  benutzt, da das Interesse an der Verteilung der Frequenzen meist größer ist. In (3.20) wird dann nur noch über die Intensität in den einfallenden Raumwinkel integriert:

$$\eta(\vec{x}, \nu) d\nu d\Omega = d\nu d\Omega \int \sigma J(\vec{x}, \nu') R(\nu', \nu) d\nu' \quad (3.21)$$

Die Wiederverteilungsfunktionen werden nach grundlegenden Eigenschaften noch weiter unterteilt. Man spricht von vollständiger Wiederverteilung, wenn die Energien des absorbierten und des emittierten Photons nicht korreliert sind. Dann kann jedes bei einer beliebigen Energie der Absorptionsprofilfunktion absorbierte Photon bei jeder Energie des Emissionsprofils emittiert werden. Die über alle Richtungen gemittelte Wiederverteilungsfunktion

lautet in diesem Fall:

$$R(\nu', \nu) = \Phi(\nu')\Phi(\nu)$$

Wird dagegen die Energie des Photons im Streuprozess nicht geändert, so spricht man von kohärenter Streuung, und es gilt:

$$R(\nu', \nu) = \Phi(\nu')\delta(\nu - \nu')$$

$\delta(x)$  ist hierbei die Diracsche Delta-Distribution.

Eine Wiederverteilungsfunktion wird physikalisch am besten dargestellt, wenn man im Kern der Linie vollständige Wiederverteilung und in den Flügeln kohärente Streuung annimmt. Werden auf diese Weise die Wiederverteilungsfunktionen kombiniert, so spricht man von teilweiser Wiederverteilung.

### 3.4.3 Linienprofile

Bei der Wechselwirkung der Strahlung mit Materie wird zwischen Kontinuums- und Linienprozessen unterschieden. Der Wirkungsquerschnitt von Kontinuumsprozessen ändert sich mit der Energie nur sehr langsam, während er sich bei Linienprozessen sehr schnell ändert.

Die Energie eines radiativen Übergangs und damit die des beteiligten Photons ist klassisch festgelegt. Diese Energie wird durch die quantenmechanische Energieunschärfe »aufgeweicht«, so dass bereits aus den quantenmechanischen Eigenschaften der Atome die Photonen eines Energiebereichs am Übergang beteiligt sind. Die Frequenzabhängigkeit dieser natürlichen Linienbreite wird mit einer normierten Profilfunktion beschrieben:

$$\Phi_{\text{Linie}}(\nu) = \frac{\Gamma/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2} \quad (3.22)$$

Hierbei ist  $\nu_0$  die nominelle Frequenz und  $\Gamma$  eine übergangsabhängige Konstante. Eine Profilfunktion dieser Form wird Lorentzprofil genannt. Wegen einer Analogie zur klassischen Theorie, in der  $\Gamma$  als Dämpfungskonstante angesehen wird, nennt man es auch Dämpfungsprofil. Dieses Profil ist um  $\nu_0$  sehr schmal, besitzt aber breite Flügel.

Die natürliche Linienbreite ist nicht der einzige Effekt, der die Frequenzabhängigkeit der Linie beeinflusst. Durch thermische Bewegung unterliegen die Atome gegenüber dem Strahlungsfeld dem Dopplereffekt. Weiterhin werden die Übergänge durch die anderen Teilchen und deren elektrische Felder gestört.

Zur Beschreibung des Dopplereffektes wird die Geschwindigkeitsverteilung der Atome mit der Maxwellverteilung angenähert. Das Dopplerprofil ist durch ein Gaußprofil gegeben:

$$\Phi_{\text{Doppler}}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left(-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right) \quad (3.23)$$

Hierbei ist  $\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{2kT/m}$  die Dopplerbreite.

Die Überlagerung der natürlichen Linienbreite mit dem Dopplerprofil ergibt sich durch die Faltung der beiden Profile. Das hieraus entstehende Profil ist ein Voigtprofil:

$$\Phi_{\text{Voigt}}(\nu) = \int \Phi_{\text{Linie}}(\nu - \nu')\Phi_{\text{Doppler}}(\nu')d\nu'$$

Diese Darstellung des Voigtprofils ist rein formal. Explizit gilt:

$$H(\alpha, \nu) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(v-y)^2 + \alpha^2} dy \quad (3.24)$$

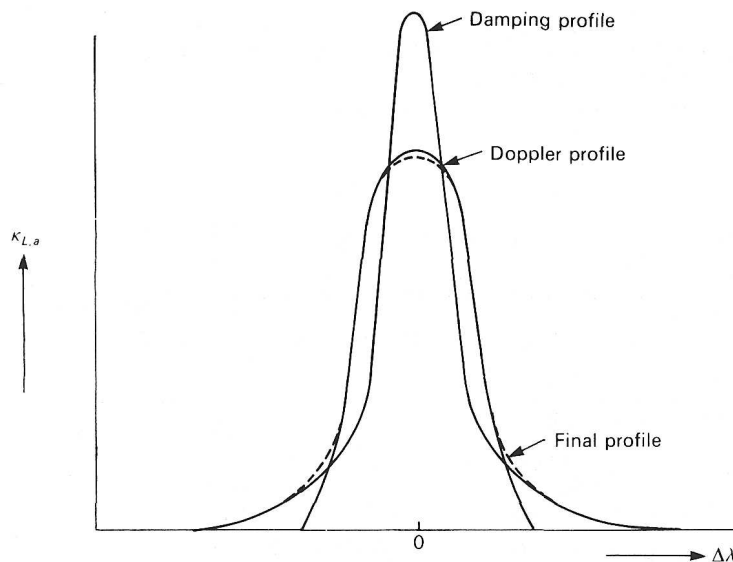
mit :

$$\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi\Delta\nu_D}$$

$$y = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}$$

$$v = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$$

Dies ist im Linienzentrum durch das Dopplerprofil dominiert, während in den Flügeln sich das Dämpfungsprofil durchsetzt. In Abbildung 3.2 ist ein Voigtprofil schematisch dargestellt.



**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung eines Voigtprofils. Hierbei ist »damping profile« ein Dämpfungsprofil und »doppler profile« ein Dopplerprofil. »Final profile« stellt das schematische Voigtprofil dar. Diese Abbildung stammt aus [Boehm-Vitense, 1989].

Das Linienprofil wird durch die Druckverbreiterung noch weiter beeinflusst. Durch den Einfluss elektrischer Felder von Elektronen erleiden Atome durch den linearen oder quadratischen Starkeffekt und durch induzierte Dipolmomente Energieniveaushiftungen. Die Verschiebungen sind in den oberen und unteren Niveaus unterschiedlich und hängen ebenfalls verschieden von der Entfernung zum Störer ab. Daher verbreitert und verschiebt sich die Linie nicht nur, sondern sie wird auch asymmetrisch.

Die Berechnung der Profildfunktionen ist mittels zeitabhängiger Störungsrechnung möglich, jedoch gibt es Näherungen, um die Profile analytisch zu beschreiben.

Die Eigenschaften der Störungen hängen von den lokalen physikalischen Eigenschaften ab.

Zum Beispiel hängt die Dopplerverbreiterung von der Temperatur, die Druckverbreiterung hingegen vom Druck und der Temperatur ab. Die Profildichten sind daher vom betrachteten Ort in der Atmosphäre abhängig und müssen ortsabhängig bestimmt werden.

### 3.4.4 Die Wirkungsquerschnitte

Um die Extinktion von Strahlung und die Besetzungszahlen zu berechnen, müssen die Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen möglichen Prozesse bekannt sein.

Hier wird lediglich auf die Strahlungsübergänge näher eingegangen. Für die kollisionsbedingten Übergänge ist für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte prinzipiell dieselbe Methodik gültig.

Die Daten für alle Wirkungsquerschnitte stehen selten durch die Theorie zur Verfügung. Daher werden sie meist in Experimenten gemessen [Dere *et al.*, 1997] [Dere *et al.*, 2001] [APED, ] [Kurucz, 2002].

Bei Emissions- und Absorptionsprozessen muss bei der Betrachtung des Wirkungsquerschnittes berücksichtigt werden, dass Profildichten die Frequenzabhängigkeit bestimmen. Wenn im Folgenden von einem Wirkungsquerschnitt gesprochen wird, so ist der Wirkungsquerschnitt für den betrachteten Übergang gemeint. Der über alle Richtungen gemittelte Wirkungsquerschnitt folgt durch Multiplikation mit der Energie des Photons und Division durch  $4\pi$ .

### gebunden-gebunden-Übergänge

Die Wirkungsquerschnitte der gebundenen Strahlungsübergänge werden nach Einstein mit Einstein-Koeffizienten beschrieben. Der Prozess der spontanen Emission wird durch den Koeffizienten  $A_{ij}$ , die Absorption durch  $B_{ji}$  und der Prozess der stimulierten Emission durch  $B_{ij}$  beschrieben. Dabei gibt der zweite der Indizes den Zustand an, der bevölkert wird.

Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten werden in der Annahme des LTE und des detaillierten Gleichgewichts berechnet. In der Näherung muss das Strahlungsfeld mit dem eines schwarzen Körpers identisch sein. Die Einsteinkoeffizienten sind Eigenschaften der Atome. Daher gelten die Beziehungen, die im LTE hergeleitet werden, auch im NLTE:

$$A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji} \quad (3.25)$$

$$\frac{B_{ij}}{B_{ji}} = \frac{g_j}{g_i} \iff B_{ij}g_i = B_{ji}g_j \quad (3.26)$$

Wird die Wirkung von eingestrahelter Intensität als quantenmechanische Störung betrachtet, kann mittels Störungsrechnung die Übergangswahrscheinlichkeit  $B_{ij}$  von dem quantenmechanischen Zustand  $|i\rangle$  in den Zustand  $|j\rangle$  berechnet werden. Es ergibt sich:

$$B_{ji} = \frac{8\pi^2 e^2}{3c\hbar^2} |\langle j|\vec{r}|i\rangle|^2 \quad (3.27)$$

wobei  $e$  die Elementarladung,  $\hbar = h/2\pi$  und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Über (3.25) und (3.26) sind dann auch die beiden anderen Koeffizienten bekannt.

Ein Übergang wird häufig durch seine Oszillatorstärke  $f_{ij}$  charakterisiert. In einer nichtquantenmechanischen Betrachtung ergibt sich für den totalen Wirkungsquerschnitt ein konstanter Wert, der nicht vom betrachteten Übergang abhängt. Bei Berücksichtigung von quantenmechanischen Effekten gilt dies nicht. Um das klassische Ergebnis mit dem quantenmechanischen in Verbindung zu setzen, wird die Oszillatorstärke als Korrekturfaktor eingeführt:

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{ij} = \frac{h\nu}{4\pi} B_{ij} \quad (3.28)$$

In (3.27) werden die quantenmechanischen Eigenfunktionen des betreffenden Ions betrachtet. Diese stehen nur im Fall des Wasserstoffatoms analytisch zur Verfügung. Für andere Atome müssen die Koeffizienten daher numerisch berechnet oder im Experiment gemessen werden.

### gebunden-frei-Übergänge

Die Wirkungsquerschnitte der gebunden-frei-Übergänge werden mittels der Einstein-Milne-Koeffizienten beschrieben. Die Energien der ungebundenen Zustände sind kontinuierlich. Um die Energie zu beschreiben, wird die Geschwindigkeit der freien Elektronen gewählt. Diese Elektronen treten untereinander durch elastische Stöße in Wechselwirkung. Näherungsweise sind die Geschwindigkeiten der Elektronen entsprechend der Maxwellverteilung verteilt.

Die Wahrscheinlichkeit für eine Photoionisation eines Ions durch ein Photon ist  $p_\nu$ . Weiterhin ist  $G(v)$  die spontane Rekombinationswahrscheinlichkeit und  $F(v)$  die induzierte Rekombinationswahrscheinlichkeit für freie Elektronen im Geschwindigkeitsbereich  $[v, v + dv]$ . Diese Koeffizienten sind wie die Einstein-Koeffizienten atomare Eigenschaften. Daher gelten im LTE hergeleitete Beziehungen der Koeffizienten untereinander auch allgemein:

$$F(v) = \frac{2h\nu^3}{c^2} G(v) \quad (3.29)$$

$$p_\nu = \frac{8\pi m^2 v^2}{h^2} \frac{u_{++}}{u_+} G(v) \quad (3.30)$$

Hierbei bedeutet  $u_{++}$  die Zustandssumme des ionisierten und  $u_+$  die des nichtionisierten Ions.

Ebenso wie bei den Einstein-Koeffizienten sind die Absolutwerte quantenmechanisch berechenbar. Die Zustandsfunktionen des Ions haben hierbei nicht mehr diskrete sondern kontinuierliche Energiewerte und werden im Folgenden durch  $|E\rangle$  dargestellt:

$$p_\nu = \frac{8\pi^3 e^2}{3ch} \frac{1}{g_i} |\langle E | \vec{r} | i \rangle|^2 \quad (3.31)$$

### frei-frei-Übergänge

Die frei-frei-Übergänge haben keinen Einfluss auf die Besetzungszahlen. Daher gehen sie nicht in die Ratengleichung mit ein. Sie tragen aber sehr wohl zum Strahlungsfeld bei. Die Wirkungsquerschnitte stehen theoretisch wieder über die Matrixelemente des Ortsoperators für freie Zustände zur Verfügung.

### 3.5 Die Ratengleichung

Die Rate eines Übergangs entspricht der Anzahl der pro Zeit- und Volumenelement stattfindenden Übergänge. Die Opazität eines Ions hängt proportional von der Konzentration des Ions und den Raten der möglichen Übergänge ab. Die Wellenlängenabhängigkeit der Opazität ist durch einen vom quantenmechanischen Zustand des Ions abhängigen Wirkungsquerschnitt gegeben. Die Anzahl der Ionen im Zustand  $|i\rangle$  wird als  $n_i$  geschrieben. Ein Ion unterscheidet sich von anderen Ionen mit gleicher Kernladungszahl durch den Ionisationsgrad, der angibt, wie stark das betrachtete Ion ionisiert ist.

Befindet sich das Ion im LTE, so ist  $n_i$  durch die Boltzmann-Gleichung bestimmt. Im Falle des NLTE muss der Einfluss des Strahlungsfeldes berücksichtigt werden. Dabei werden alle Prozesse betrachtet, die den betrachteten Zustand be- oder entvölkern. Die Rate der Übergänge setzt sich aus einem radiativen  $\mathfrak{R}$  und einem Kollisions-Anteil  $\mathfrak{C}$  zusammen. Weiterhin werden Kontinuums- und diskrete Prozesse unterschieden. Die zeitliche Änderung der Besetzung des Zustands  $|i\rangle$  eines bestimmten Ionisationsgrades schreibt sich dann [Mihalas, 1970]:

$$-\frac{dn_i}{dt} = \sum_{i \neq j} \mathfrak{R}_{ij} - \sum_{i \neq j} \mathfrak{C}_{ij} + \mathfrak{R}_{i\kappa} + \mathfrak{C}_{i\kappa} \quad (3.32)$$

wobei die Notation

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{ij} &= n_i R_{ij} - n_j R_{ji} \\ \mathfrak{C}_{ij} &= n_i C_{ij} - n_j C_{ji} \\ \mathfrak{R}_{i\kappa} &= n_i R_{i\kappa} - n_\kappa R_{\kappa i} \\ \mathfrak{C}_{i\kappa} &= n_i C_{i\kappa} - n_\kappa C_{\kappa i} \end{aligned}$$

verwendet wird.  $|\kappa\rangle$  ist hierbei ein Zustand, der im Kontinuum liegt. Bei der Summation über  $i \neq j$  nimmt der Zustand  $|i\rangle$  für verschiedene  $j$  entweder die Rolle des energetisch höheren Zustands oder die des geringeren Zustands an.

Bei Supernovaexplosionen entsteht radioaktives Material, das durch Zerfallsprozesse ebenfalls die Besetzungszahlen beeinflusst. Auch diese Prozesse müssen in Ratengleichungen berücksichtigt werden.

Nicht alle Elemente werden im NLTE und somit mittels Ratengleichungen behandelt. Da Rechnerressourcen begrenzt sind, ist es aus Zeitgründen nicht sinnvoll, die Elemente, die einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf das Spektrum haben, im NLTE zu behandeln. Daher wird angenommen, dass diese Elemente sich im LTE befinden und ihre Besetzungszahlen der Boltzmann- und Saha-Gleichung genügen.

#### 3.5.1 Strahlungsraten

Die verschiedenen Strahlungsraten sind im Prinzip durch die Wirkungsquerschnitte gegeben. Bei der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld von gebunden-gebunden-Übergängen spielen die Profildichten eine Rolle. Unter der Annahme einer winkelunabhängigen Wiederverteilungsfunktion mit vollständiger Wiederverteilung und mit der Notation aus Abschnitt



(3.4.4) ergibt sich für die Strahlungsraten:

$$R_{ij} = B_{ij} \int \phi(\nu) J_\nu d\nu \quad (3.33)$$

$$R_{ji} = A_{ji} + B_{ji} \int \phi(\nu) J_\nu d\nu \quad (3.34)$$

$$R_{i\kappa} = 4\pi \int p_\nu J_\nu d\nu \quad (3.35)$$

$$R_{\kappa i} = 4\pi \int p_\nu \left( J_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \quad (3.36)$$

wobei bei den Kontinuumsprozessen der induzierten und spontanen Emission die Integration über die Maxwellverteilung mittels (3.30) umgangen wurde.

### 3.5.2 Kollisionsraten

Eine Atmosphäre ist aus vielen verschiedenen Teilchen wie Atomen, Ionen und Elektronen zusammengesetzt. Diese Teilchen ändern bei gegenseitigen Stößen ihre quantenmechanischen Zustände und übertragen sich gegenseitig Energie und Impuls.

Je häufiger eine solche Kollision stattfindet, desto größer ist ihr Einfluss auf die Opazität. Denn durch die Stöße werden Ionen in andere Besetzungszustände versetzt, was über die Ratengleichungen die Opazität beeinflusst. Gegenüber den Elektronen ist die Geschwindigkeit der Atome so gering, dass Stöße zwischen Atomen und Ionen untereinander vernachlässigt werden und nur Kollisionen mit Elektronen wichtig sind.

Um den Wirkungsquerschnitt für eine Zustandsänderung unter einer Kollision zu finden, wird eine Beschreibung des Störpotentials benötigt, das durch die Kollision verursacht wird. Die Wirkungsquerschnitte werden daher mit großem numerischen Aufwand oder durch experimentelle Methoden gewonnen.

Ist der Wirkungsquerschnitt für einen Übergang bekannt, so folgt für die Rate der Anregungen  $C_{ij}$  vom Zustand  $|i\rangle$  in den Zustand  $|j\rangle$ , wobei der Endzustand auch im Kontinuum  $\kappa$  liegen kann:

$$n_i C_{ij} = n_i n_e \int_{v_0}^{\infty} \sigma_{ij} f(v) v dv \equiv n_i n_e q_{ij}(T) \quad (3.37)$$

$$n_j C_{ji} = n_j \left( \frac{n_i}{n_j} \right)^* n_e q_{ij}(T) \quad (3.38)$$

wobei  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt und  $f(v)$  die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen sind. Die Rate für den abregenden Übergang folgt aus dem detaillierten Gleichgewicht und daraus, dass die Raten atomare Faktoren sind, die nicht von den physikalischen Gegebenheiten abhängen.

### 3.6 Die Quellfunktion und die optische Tiefe

Der Quotient aus Emissions- und Absorptionsvermögen wird *Quellfunktion*<sup>3</sup>  $S_\nu$  genannt. Sie ist ein Maß dafür, ob dem Strahlungsfeld Energie entzogen oder hinzugefügt wird.

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \quad (3.39)$$

Betrachtet man thermische Absorption und Emission  $\kappa_\nu$  und  $\kappa_\nu B_\nu$ , sowie näherungsweise isotrope, kohärente Kontinuumsstreuung von Elektronen und Rayleighstreuung, so ergibt sich:

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} B_\nu + \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} J_\nu \quad (3.40)$$

$$S_\nu = \epsilon B_\nu + (1 - \epsilon) J_\nu \quad (3.41)$$

Die Größe  $\epsilon$  gibt an, welcher Anteil der Photonen nicht gestreut wird. Wird eine Situation betrachtet, in der LTE strikt gültig ist, ist  $\epsilon$  gleich eins. Im Fall des LTE gilt daher:

$$S_\nu = B_\nu$$

Wird zusätzlich Linienstreuung berücksichtigt, indem angenommen wird, dass ein Bruchteil  $(1 - \epsilon'')$  der Photonen in den Linien gestreut wird, nimmt der Ausdruck für die Quellfunktion eine kompliziertere Form an. Von dem Rest der Photonen wird angenommen, dass ihre Energie an die lokale Temperatur koppelt und thermisch emittiert wird. Für die Absorption und Emission gilt daher:

$$\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu + \chi_{\text{Linie}} \Phi_\nu \quad (3.42)$$

$$\eta_\nu = \kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu + \epsilon'' \chi_{\text{Linie}} \Phi_\nu B_\nu + (1 - \epsilon'') \int \chi_{\text{Linie}} \psi_\nu J_\nu d\nu \quad (3.43)$$

$$\Rightarrow S_\nu = \epsilon' B_\nu + (1 - \epsilon') \bar{J}_\nu \quad (3.44)$$

Die Quellfunktion der Form (3.41) bleibt bei der richtigen Wahl der Koeffizienten erhalten. Daher wird im Folgenden als allgemeine Form der Quellfunktion (3.41) angenommen.

Eine herkömmliche Ortsangabe zur Beschreibung von Entfernungen entlang von Photonenwegen innerhalb einer Atmosphäre ist nicht geeignet, da die Wechselwirkung der Photonen mit dem Medium nicht berücksichtigt werden. Stattdessen wird die optische Tiefe  $\tau_\nu$  als Wegintegral über die Extinktion  $\chi_\nu$  definiert:

$$\tau_\nu(s) = - \int_{s_i}^{s_f} \chi_\nu(\vec{x}(s')) ds' \quad (3.45)$$

Die Integration verläuft in Richtung des Zentrums, so dass die optische Tiefe von außen nach innen zunimmt.

Die optische Tiefe ist frequenzabhängig und entspricht der Anzahl der freien Weglängen der Photonen der jeweiligen Frequenz. Bei der Angabe von optischen Tiefen einer Atmosphäre

<sup>3</sup>Der Begriff Quellfunktion ist eine Übersetzung von dem englischen Begriff »source function«. Ursprünglich wurde diese Größe im deutschen Sprachgebrauch mit Ergiebigkeit bezeichnet.

wählt man eine optische Tiefe  $\tau_{\text{std}}$ , deren Frequenz von der des Maximums des Spektrums nicht allzuweit entfernt ist.

Neben dieser willkürlichen optischen Standardtiefe  $\tau_{\text{std}}$  gibt es noch andere optische Tiefen, die aus gemittelten Absorptionen berechnet werden. Die gemittelten Absorptionen sind dann wichtig, wenn die Wellenlängenabhängigkeit der Extinktion vernachlässigt wird. Dies ist z.B. in der Beschreibung der Energieerhaltung in bewegten Atmosphären wichtig (siehe Abschnitt 4.9).

Die gemittelten Absorptionen sind so definiert, dass sie als gemittelter Wert aus einem Integral herausgezogen werden können, ohne den Wert des Integrals zu verändern:

$$\text{Rosseland : } \quad \frac{1}{\chi_{\text{R}}} = \frac{\int \frac{1}{\chi_{\nu}} \frac{dK_{\nu}}{ds} d\nu}{\int \frac{dK_{\nu}}{ds} d\nu} \quad (3.46)$$

$$\text{Planck : } \quad \kappa_{\text{P}} = \frac{1}{B} \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} B_{\nu} d\nu \quad (3.47)$$

$$\text{Absorption : } \quad \kappa_{\text{J}} = \frac{1}{J} \int_0^{\infty} \kappa_{\nu} J_{\nu} d\nu \quad (3.48)$$

$$\text{Fluss : } \quad \kappa_{\text{H}} = \frac{1}{H} \int_0^{\infty} (\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}) H_{\nu} d\nu \quad (3.49)$$

## 3.7 Strahlungstransport in bewegten Medien

Wird ein infinitesimales Raumelement betrachtet, so lässt sich der Transport von eingestrahelter Intensität mittels einer Bilanzgleichung beschreiben.

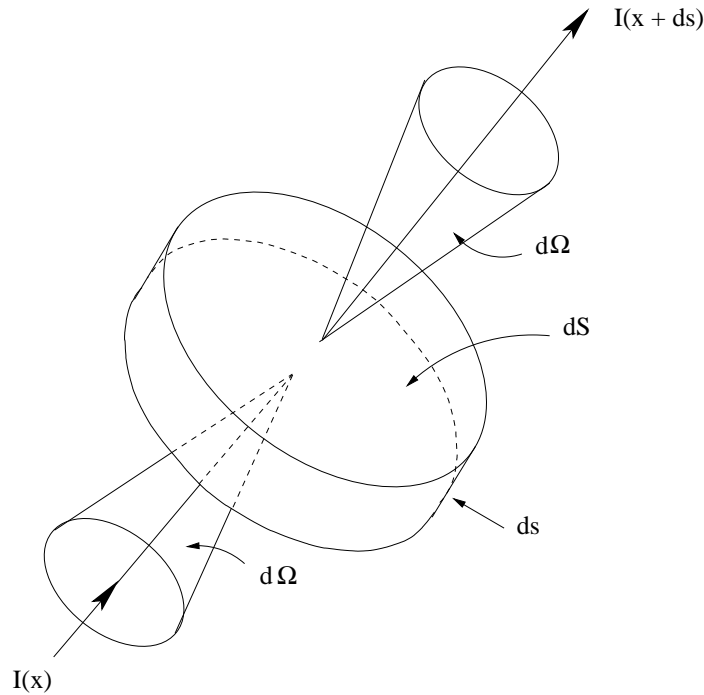
Bewegt sich das Volumenelement gegenüber dem Beobachter, so werden relativistische Effekte wichtig. Bei einer relativistischen Beschreibung werden Inertialsysteme benötigt. Das Inertialsystem des Beobachters wird das Eulersystem genannt, während jedes der mit der Hülle mitbewegten Systeme als Lagrangesystem bezeichnet wird.

### 3.7.1 Strahlungstransportgleichung

Angenommen, eine Materiescheibe (siehe Abbildung 3.3) der Dicke  $ds$  und der Fläche  $dS$  werde mit einer einfallenden Intensität pro Raumwinkel  $d\Omega$ , pro Frequenzintervall  $d\nu$  und pro Zeitintervall  $dt$  bestrahlt. Weiterhin soll die Materiescheibe ebenfalls Strahlung emittieren.

Die Differenz dieser Intensitäten muss identisch mit der Differenz zwischen der Emissivität  $\eta$  und der Absorption  $\chi I$  im Volumen  $dsdS$  der Materiescheibe innerhalb der gleichen Intervalle  $d\nu$  und  $dt$  und dem Raumwinkel  $d\Omega$  sein:

$$\{I_{\nu}(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t, \vec{n}) - I_{\nu}(\vec{x}, t, \vec{n})\} d\Omega d\nu dt dS = [\eta_{\nu} - \chi_{\nu} I_{\nu}(\vec{x}, t, \vec{n})] \underbrace{d\Omega d\nu dt ds dS}_{dV} \quad (3.50)$$



**Abbildung 3.3:** Infinitesimale Materiescheibe mit Ein- und Ausgangsintensitäten.

Wird die Materiescheibe als infinitesimale Größe betrachtet, so ist die Differenz der Intensitäten ein totales Differential:

$$\Delta I_\nu \rightarrow dI_\nu = dI_\nu(\vec{x}, t)|_{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial s} ds + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt = \left[ \frac{\partial I_\nu}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right] ds$$

Somit folgt allgemein:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (3.51)$$

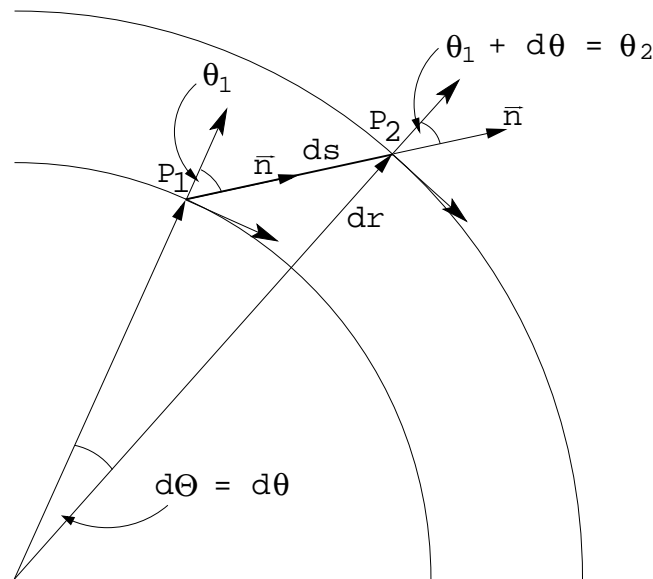
Die Differentiation nach dem Weg  $s$  ist koordinatenabhängig. In kartesischen Koordinaten ergibt sich einfach:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$$

Bei fehlender Abhängigkeit in  $x$ - und  $y$ -Richtung vereinfacht sich (3.51) zu:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (3.52)$$

Bei der Bildung eines Differentials einer Funktion in krummlinigen Koordinaten muss berücksichtigt werden, dass die Funktionen an den beiden infinitesimal entfernten Punkten in anderen Koordinatensystemen beschrieben werden. Beim Paralleltransport des Vektors  $\vec{n}$  ändern sich die Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems, weshalb sich ebenfalls die Komponenten ändern.



**Abbildung 3.4:** Parallelverschiebung des Propagationsvektors  $\vec{n}$  entlang  $d\vec{s}$  von Punkt  $P_1$  nach  $P_2$ . Die Abhängigkeit von den Azimutalwinkeln wurde hier vernachlässigt; sie verschwindet bei strikter sphärischer Symmetrie.

In Abbildung 3.4 sind die bei dem Transport auftretenden Größen dargestellt. Da die Größe  $d\theta = \theta_2 - \theta_1$  negativ ist, folgt aus den Zusammenhängen zwischen Winkeln und Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck die Beziehungen zwischen den Differentialen:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

Bei der Annahme von sphärischer Symmetrie verschwinden alle anderen Variationen der Koordinaten nach dem Weg. Somit gilt unter der Verwendung des Winkelkosinus  $\mu = \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \end{aligned}$$

Nach [Mihalas und Weibel Mihalas, 1984] lautet die Strahlungstransportgleichung in sphärischer Symmetrie daher:

$$\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (3.53)$$

### 3.7.2 Die Invarianten des Strahlungstransports

Wird ein sich gleichförmig bewegendes System betrachtet, so kann die spezielle Relativitätstheorie angewendet werden. Geht man von einer gleichförmigen Bewegung der Atmosphäre aus, werden physikalische Vorgänge in dem mitbewegten Lagrangesystem durch die lorentztransformierten Vorgänge im Eulersystem beschrieben.

Die Lorentztransformation lautet allgemein:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x'^\beta \quad (3.54)$$

wobei die Transformationsmatrix explizit in (A.1) gegeben ist. Die ungestrichenen Größen sind die Koordinaten im Ruhesystem. Physikalische Gesetze in der speziellen Relativitätstheorie sind stets Tensorgleichungen. Für den Strahlungstransport ist lediglich die klassische Gleichung im Eulersystem bekannt.

Es lassen sich jedoch Zusammenhänge zwischen Größen im Lagrange- und Eulersystem finden, die relativistisch invariant sind. Mittels dieser Zusammenhänge wird die klassische Gleichung des Eulersystems mit Größen des Lagrangesystems ausgedrückt. Eine Gleichung, die nur von den Größen im bewegten System abhängt, beschreibt die Physik auch aus der Sicht eines Beobachters im Lagrange-System.

Die Lorentztransformation ist für Vierervektoren und deren dyadischen Produkte gültig. Daher müssen die Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen mit Hilfe von Vierervektoren gefunden werden.

### Die Invariante der Intensität

Die Intensität des Strahlungsfeldes entspricht einer Verteilungsfunktion von Photonen. Für Photonen ist als ein Vierervektor der Impulsvierervektor bekannt. Durch Transformation mit (3.54) folgen Beziehungen zwischen den Frequenzen und Ausbreitungsrichtungen im Lagrange- und im Eulersystem.

Die Anzahl von Photonen in einem Frequenzintervall, die durch eine Fläche treten, ist eine skalare Größe. Wird nun eine Zählfläche im Inneren der Atmosphäre betrachtet, so ist die Anzahl der Photonen, die diese Fläche durchtreten, in beiden Bezugssystemen gleich.

Unter Berücksichtigung der Bewegung der Fläche im Lagrangesystem und der Zeitdilatation findet man eine Beziehung zwischen den spezifischen Intensitäten der beiden Bezugssysteme. Nach Anhang (B.13) gilt:

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \frac{I'_{\nu'}}{\nu'^3} = \text{invariant} \quad (3.55)$$

Mit (3.55) ist damit eine Größe gegeben, mit der die Intensität in verschiedenen Inertialsystemen beschrieben werden kann [Mihalas und Weibel Mihalas, 1984].

### Die Invarianten der Emmissivität und der verallgemeinerten Absorption

Die Emmissivität  $\eta_\nu$  erzeugt pro Volumen  $dV$ , im Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$ , im Raumwinkel  $d\Omega$  und pro Zeitintervall  $dt$   $\frac{\eta_\nu}{h\nu}$  Photonen. Diese Zahl ist ein echter Skalar. Daher gilt:

$$\frac{\eta_\nu}{h\nu} d\Omega d\nu dt dV = \frac{\eta'_{\nu'}}{h\nu'} d\Omega' d\nu' dt' dV' \quad (3.56)$$

Für das vierdimensionale Volumenelement gilt:

$$c dt' dV' = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right| c dt dV$$

Bei Lorentztransformationen ist die Jacobideterminante identisch eins. Mit (B.4) und (B.9) folgt in (3.56):

$$\frac{\eta_\nu}{\nu^2} = \frac{\eta'_{\nu'}}{\nu'^2} = \text{invariant} \quad (3.57)$$

Nach einer analogen Herleitung folgt für die verallgemeinerte Absorption:

$$\begin{aligned} \chi_\nu &= \frac{\nu^2}{\nu'^2} \frac{I'_{\nu'}}{I_\nu} \chi'_{\nu'} \\ \nu \chi_\nu &= \nu' \chi'_{\nu'} = \text{invariant} \end{aligned} \quad (3.58)$$

### 3.7.3 Kritik an den Invarianten des Strahlungsfeldes

Die Invariante des Strahlungstransports  $\frac{I_\nu}{\nu^3}$  kann keine relativistische Invariante sein; denn diese Invariante ist einer Verteilungsfunktion im Phasenraum proportional:

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} \propto F(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich ebenfalls, wenn von der Darstellung der Intensität im Frequenzraum durch Zusammenfassen der Argumente  $\vec{n}$  und  $\nu$  in  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n}$  in den Phasenraum übergegangen wird.

Die Verteilungsfunktion ist zeitabhängig, da Prozesse existieren, die die Anzahl der Teilchen variieren. Relativistische Invarianz würde nun bedeuten, dass gilt [Oxenius, 1986]:

$$F(\vec{x}, \vec{p}, t) = F'(\vec{x}', \vec{p}', t')$$

Nun sind aber Ereignisse, die im Ruhesystem gleichzeitig geschehen, im bewegten System nicht mehr zwingend gleichzeitig. Gleiche Ereignisse werden von den beiden Beobachtern relativ gesehen. Z.B. laufen im Ruhesystem zwei Photonen in verschiedene Richtungen und werden zur gleichen Zeit absorbiert. Bewegt sich nun ein Beobachter vom Betrag seiner Geschwindigkeit her mehr in die Richtung eines Photons, so wird er die Absorption eben dieses Photons früher bemerken als die des anderen. Das bedeutet, dass zum Zeitpunkt der Absorption im Ruhesystem im bewegten System noch ein Photon mehr da ist. Somit ist die Verteilungsfunktion keine relativistische Invariante.

Dies scheint zunächst den Satz von Liouville über die Erhaltung des Phasenraumvolumens [Misner *et al.*, 1973] [van Kampen, 1969] zu verletzen, doch kommt dieser Satz und die dargestellte Herleitung der Invarianten in dem betrachteten Fall gar nicht zur Anwendung. Diese gelten nämlich nur dann, wenn die Photonen nicht vernichtet werden können.

Die Invariante der Intensität (3.55) ist aber dennoch sinnvoll, da sich bei der Betrachtung eines genügend großen Volumenelements die Unterschiede in den Emissionen und Absorptionen gegenseitig aufheben. Es muss also lediglich die Phasenraumzelle groß genug gewählt werden, damit die Unterschiede zwischen den verschiedenen Eigenzeiten der Beobachter die Anzahl der Photonen nicht ändern.

Ein weiterer Kritikpunkt liegt in der Handhabung der Eigenzeiten der Inertialsysteme. Bei der Betrachtung der Zählrate im mitbewegten System (siehe Anhang B), wird angenommen, dass der Beobachter ruht und die Fläche sich ihm gegenüber bewegt. Dies bedeutet, dass in diesem Szenario die Zeit des Beobachters im Eulersystem langsamer voranschreitet, als

die des Beobachters im Lagrangesystem. Diese Sichtweise ist nach der speziellen Relativitätstheorie physikalisch zulässig. Dies gilt aber in dem Moment nicht mehr, in dem der Beobachter in der Atmosphäre mit uns als Beobachter auf der Erde Information austauscht. Denn wir ruhen gegenüber dem Beobachter im Eulersystem, was bedeutet, dass unsere Inertialsysteme identisch sind, weswegen der Beobachter in der Atmosphäre sich bewegen muss. Für uns als Beobachter auf der Erde muss also die Zeit in der Hülle der Supernova langsamer ablaufen als unsere eigene. Es wird in der Herleitung der Strahlungstransportgleichung in bewegten Medien aber angenommen, dass die Zeit im Eulersystem langsamer läuft als die Zeit im Lagrangesystem (siehe (B.10)).

Dies ist aber lediglich ein formales Problem. Der Beobachter des Spektrums ist nicht in der Lage, mit dem Beobachter in der Atmosphäre Informationen auszutauschen. Das Durchlaufen von Photonen durch eine Fläche kann ebenfalls nicht beobachtet werden. Dieser Prozess wird nur geschlossen innerhalb der Atmosphäre betrachtet, um einen Prozess aus einem physikalisch erlaubten Inertialsystem zu beschreiben. Das beobachtete Spektrum wird nicht durch den Strahlungstransport beschrieben, sondern durch die Transformation einer lokal berechneten physikalischen Größe in das Inertialsystem des Beobachters.

### 3.7.4 Die Strahlungstransportgleichung in einem gleichförmig bewegten System

Werden in der Strahlungstransportgleichung (3.53) die Emissivität, Absorption und die Intensität über ihre Invarianten ausgedrückt, so wird der Strahlungstransport mittels bewegter Größen beschrieben [Mihalas, 1980]. Der Strahlungstransport wird dann in einem bewegten System beschrieben. Die Differentialoperatoren müssen ebenfalls transformiert werden. Da diese Transformation eine nichtsinguläre funktionale Abhängigkeit ist (Lorentztransformation), kann die Ableitung auch implizit durchgeführt werden.

Dies bedeutet, dass die Frequenz  $\nu$  und der Winkel-Kosinus  $\mu$  im Ruhesystem als konstant angenommen werden müssen. Dadurch, dass das Koordinatensystem des Ruhesystems übernommen wird, bleibt die Geschwindigkeit des neuen Systems koordinatenabhängig und verschwindet nicht. Die mitbewegten Größen  $\nu'$  und  $\mu'$  sind daher nicht konstant.

Die Differentiation erfolgt allgemein durch die Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \nu'}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \nu'} + \frac{\partial \mu'}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \mu'} \quad (3.59)$$

Wird weiterhin sphärische Symmetrie angenommen, so verschwindet jede Differentiation nach  $\mu$ , außer denen von  $\nu'$  und  $\mu'$ . Deren Abhängigkeit ist über (B.3) und (B.6) bekannt.

Die zeitabhängige Darstellung geht durch das Vernachlässigen der zeitlichen Ableitungen der Intensität und der Geschwindigkeit des mitbewegten Systems in eine zeitunabhängige Darstellung über.

Für die Darstellung im Wellenlängenraum folgt nach (C.4) als zeitunabhängige Strahlungstransportgleichung:

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial s} + a_\lambda \frac{\partial \lambda I_\lambda}{\partial \lambda} + 4a_\lambda I_\lambda = \eta_\lambda - \chi_\lambda I_\lambda \quad (3.60)$$

mit :  $a_\lambda = \gamma \left[ \frac{\beta(1 - \mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right]$



Auf den ersten Blick scheint (3.60) eine Differentialgleichung für die Intensität zu sein. Die Emissivität enthält jedoch bei der Berücksichtigung von Streuung eine Abhängigkeit von der gemittelten Intensität  $J_\nu$  (siehe (3.43)), die ihrerseits nur ein Integral über die Intensität ist. Die Gleichung (3.60) ist daher eine Integral-Differentialgleichung, an die bei ihrer Lösung noch die Lösung einer Ratengleichung gekoppelt werden muss. Dies ist notwendig, da  $\eta$  und  $\chi$  von der Intensität abhängen, diese aber selbst in (3.60) mitbestimmen.

Um eine wellenlängenunabhängige Beschreibung des Strahlungstransports zu erhalten, kann (3.60) über alle Wellenlängen und alle Raumwinkel integriert werden. Doch aus der Kenntnis heraus, dass die Dynamik des Energie- und Impulsübertrags und somit auch die Dynamik des beschriebenen Systems selbst durch die verjüngte kovariante Ableitung des Energieimpulstensors bestimmt wird, ist es möglich, die gesuchten Beziehungen zwischen dem Lagrange- und dem Eulersystem zu finden.

Nach (C.13) ergibt sich aus der kovarianten Ableitung des Strahlungsenergieimpulstensors unter anderem eine Relation zwischen dem beobachteten Fluss und den mitbewegten Momenten:

$$H = \gamma^2 \{ (1 + \beta^2 H') + \beta (J' + K') \} \quad (3.61)$$

Beziehungen solcher Art sind nützlich, um Beziehungen zwischen beobachtbaren und nicht-beobachtbaren Größen zu finden. Die obige Gleichung wird z.B. bei einer Temperaturkorrekturmethode verwendet (siehe Abschnitt 4.9). Bei dieser Methode wird ebenfalls eine über die Wellenlänge integrierte Beschreibung des Strahlungstransports benötigt.

Solch eine Beschreibung folgt aus den über alle Wellenlängen und über alle mit verschiedenen Potenzen von  $\mu$  gewichteten Raumwinkel integrierten Strahlungstransportgleichungen. Dies sind die Momentengleichungen des Strahlungstransports. Sie ergeben sich aus Linearkombinationen der Komponenten der Divergenz des Strahlungsenergieimpulstensors (siehe Anhang C).

## Kapitel 4

# PHOENIX und dessen Arbeitsweise

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften von PHOENIX vorgestellt. Es werden die physikalischen Annahmen und die Methoden dargestellt, mit denen PHOENIX das Problem des Strahlungstransports und die Berechnung des Spektrums löst.

### 4.1 Allgemeines

PHOENIX ist ein moderner allgemeiner Stern- und Planetenatmosphären Computer Code [Hauschildt und Baron, 1999] [Hauschildt *et al.*, 1997] [Baron und Hauschildt, 1998] [Hauschildt *et al.*, 2001]. Er ist so vielseitig ausgelegt, dass er von statischen Atmosphären in z.B. Hauptreihensternen, Riesen und Braunen Zwergen bis zu bewegten Atmosphären in Novae und Supernovae Modellstrukturen und die Spektren berechnen kann. Für verschiedene Objekte sind verschiedene physikalische Bedingungen zu berücksichtigen, so dass sich prinzipielle Unterschiede in der Beschreibung ergeben. Es sind daher verschiedene Modi integriert, die je nach Aufgabenstellung ausgewählt werden. Für Supernovae existiert ein eigener Modus. Wenn im Folgenden von PHOENIX gesprochen wird, so ist PHOENIX im Supernovamodus gemeint. Einige der folgenden Eigenschaften gelten jedoch ebenfalls für andere Modi.

PHOENIX berechnet die Atmosphärenstruktur und das Spektrum einer Supernova. Das Spektrum ist berechenbar, wenn das Strahlungsfeld in der Atmosphäre der Supernova bekannt ist.

Dazu wird die Atmosphäre in eine bestimmte Anzahl von Schichten aufgeteilt.<sup>1</sup> Die physikalischen Größen werden nur diskret in diesen Schichten betrachtet. Aus diesen Größen berechnet PHOENIX entsprechend der Theorie des Strahlungstransports das Strahlungsfeld in den verschiedenen Schichten. Die Gesamtheit der Größen, die das Ergebnis bestimmen, wird ein Modell genannt.

Die Berechnung des Strahlungstransports kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Im Falle von PHOENIX wird eine Charakteristiken-Methode [Olson *et al.*, 1986] verwendet, die das Strahlungsfeld entlang von Lichtwegen innerhalb der Atmosphäre berechnet.

PHOENIX berechnet die Modelle iterativ. Da nicht jede Supernova gleich ist, wird hierbei von einem Modell einer Supernova ausgegangen, das dann iterativ in ein individuelles

---

<sup>1</sup>In dieser Arbeit wurden 100 Schichten verwendet.

Modell geändert wird. Mittels Vorgaben von globalen Parametern wie zum Beispiel der Effektivtemperatur und des Geschwindigkeitsprofils werden die Korrekturen an dem Modell gesteuert, um individuelle Supernovae zu modellieren.

Der Rechenaufwand für die Berechnung eines Modells ist sehr groß. Um dennoch physikalisch realistische Modelle berechnen zu können, wurde PHOENIX parallelisiert [Hauschildt *et al.*, 1997] [Baron und Hauschildt, 1998] [Hauschildt *et al.*, 2001] [Baron *et al.*, 2003]. Bei der Parallelisierung werden Aufgaben innerhalb des Programms, die voneinander bis auf notwendigen Informationsaustausch unabhängig sind, auf verschiedene Prozessoren verteilt, so dass ihre Berechnung gleichzeitig geschieht. Die hieraus gewonnene Zeitersparnis macht die Modellierung von Supernovae erst möglich.

## 4.2 Physikalische Annahmen

Das Problem der Berechnung des Strahlungstransports wird als stationär angesehen. Dies bedeutet, dass die Zeitskalen der mechanischen Dynamik viel größer sind als die typischen Zeitskalen, auf denen der Strahlungstransport auf Veränderungen reagiert. Dadurch verschwinden die expliziten Ableitungen nach der Zeit und die grundlegenden Formeln des Strahlungstransports vereinfachen sich erheblich. Dies ist in der hier betrachteten frühen Phase nach dem Ausbruch gerechtfertigt, da sich das Spektrum nicht auf Zeitskalen von Minuten ändert, typische Spektren jedoch auf diesen Zeitskalen aufgenommen werden. Die Beschreibung einer Supernova durch zeitunabhängige Gleichungen bedeutet daher eine Momentaufnahme der Supernova.

Weiterhin wird das Problem als sphärisch symmetrisch betrachtet. Dabei geht man davon aus, dass Abweichungen von der sphärischen Symmetrie, die durch Rotation oder durch die mehrdimensionale hydrodynamisch bestimmte Struktur einer Supernovahülle verursacht werden, nicht die prinzipiellen physikalischen Vorgänge beeinflussen. Das berechnete Spektrum beschreibt den Zustand einige Tage nach der Explosion. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Hülle in einer Phase, in der sie sich selbstähnlich und kräftefrei ausdehnt. Sie wird durch eine Sedov-Lösung der hydrodynamischen Gleichungen beschrieben [Zel'Dovich und Raizer, 1967].

Aus Mangel an hydrodynamisch genau berechneten Modellen von Supernovae wird der Dichteverlauf in der Atmosphäre entweder durch ein Potenzgesetz oder durch einen exponentiellen Verlauf vorgegeben:

$$\varrho(r) = \varrho_0 \left( \frac{r}{R_0} \right)^{-n} \quad (4.1)$$

$$\varrho(r) = \varrho_0 \exp \left( \frac{v_e}{v_0} (r - R_0) \right) \quad (4.2)$$

Dabei ist  $R_0$  ein charakteristischer Radius der Hülle, z.B. bei der optischen Tiefe  $\tau = 1$ .  $\varrho_0$  ist demnach eine charakteristische Dichte bei  $\tau = 1$ .

Unter der Annahme einer kräftefreien Ausbreitung der Hülle ergibt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil:

$$v(r) = v_0 \frac{r}{R_0} \quad (4.3)$$

wobei  $v_0$  eine charakteristische Geschwindigkeit der Hülle bei  $\tau = 1$  ist.

Weiterhin muss die Energieerhaltung erfüllt sein. Da diese eng an hydrodynamische Rechnungen des Strahlungstransportes gekoppelt ist, wird radiatives Gleichgewicht im Lagrange-System angenommen. Das heißt, dass jedes Volumenelement im Lagrangesystem genauso viel Energie emittiert wie absorbiert. Die Absorption und Emission von Energie im Euler-System ist dagegen abhängig vom relativen Bewegungszustand der Emittent und Absorber untereinander. Der Fluss im Lagrangesystem ist daher tiefenabhängig.

Die Supernova wird nicht vollständig in der Näherung des LTE betrachtet, sondern die Besetzungszahlen für wichtige Elemente werden im NLTE berechnet. Die Effekte von Magnetfeldern werden dagegen nicht beachtet.

Der Strahlungstransport wird also eindimensional, sphärisch symmetrisch, vollständig speziell relativistisch und unter Berücksichtigung von NLTE Linientransfer behandelt.

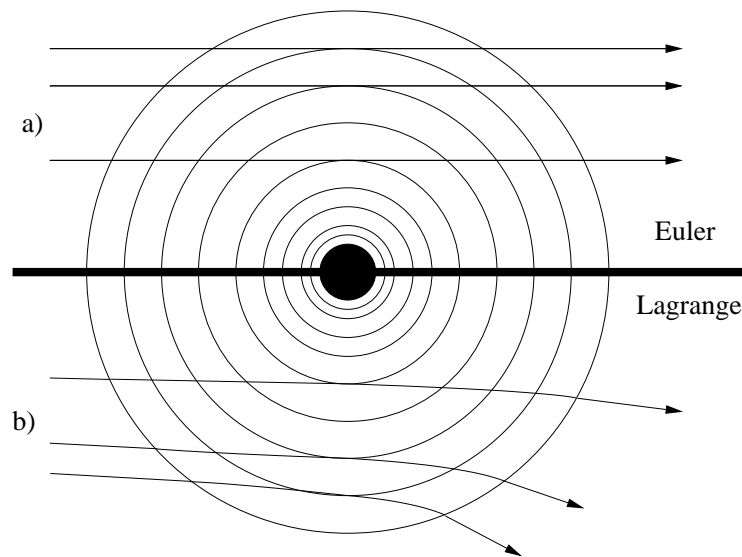
### 4.3 Die Charakteristiken des Strahlungsfeldes

Das Strahlungsfeld wird im Lagrangesystem entlang von Lichtwegen gleicher Frequenz, so genannten Charakteristiken, durch die Supernovahülle berechnet.

In einem statischen Medium sind die Charakteristiken für jeden Beobachter gerade Linien (siehe Teil *a*) der Abbildung 4.1). Bei expandierenden Medien ist dies nicht immer der Fall. Für einen Beobachter in einem entfernten Inertialsystem, dem Eulersystem äquivalent, bewegt sich Licht immer geradlinig. Daher sind die Lichtwege innerhalb der Hülle ebenfalls Geraden. Für einen mitbewegten Beobachter in der Supernovahülle sind zwar physikalische Lichtwege ebenfalls Geraden, doch aufgrund der relativen Bewegung der verschiedenen Schichten untereinander ändert sich die Frequenz entlang dieser Lichtwege und durch die Effekte der Aberration und Advektion sehen Beobachter in verschiedenen Schichten verschiedene Richtungen für die Charakteristik einer beliebigen, aber festen Frequenz. Die Charakteristik, die in den verschiedenen Lagrangesystemen beschrieben wird, ist daher gekrümmt (siehe Teil *b*) der Abbildung 4.1).

Der Verlauf der Intensität wird durch die sphärisch symmetrische, speziell relativistische Strahlungstransportgleichung (3.60) im mitbewegten System bestimmt. Die Expansion des Mediums wird in der Gleichung berücksichtigt, so dass die Summe der Ableitungen der Intensität nach räumlichen Koordinaten samt Koeffizienten als totales Differential der Intensität dividiert durch das Differential des Weges einer Charakteristik interpretiert werden kann:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial r} dr + \frac{\partial I}{\partial \mu} d\mu \\ \frac{dI}{ds} &= \frac{\partial I}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial I}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds} \end{aligned} \quad (4.4)$$



**Abbildung 4.1:** Im oberen Teil a) ist der Verlauf von tangentiellen Charakteristiken im Eulersystem dargestellt, während im unteren Teil b) die Charakteristiken im Lagrangesystem schematisch dargestellt sind.

Durch Vergleich mit (3.60) sind die Differentialgleichungen der Charakteristiken bekannt:

$$\frac{dr}{ds} = \gamma(\mu + \beta) \quad (4.5)$$

$$\frac{d\mu}{ds} = \gamma(1 - \mu^2) \left[ \frac{1 + \beta\mu}{r} - \gamma^2(\mu + \beta) \frac{\partial\beta}{\partial r} \right] \quad (4.6)$$

Zur Bestimmung des genauen Verlaufs der Charakteristik im Lagrangesystem müssen diese Differentialgleichungen gelöst werden. Dies ist jedoch nicht nötig, da nur die Schnittwinkel der Charakteristiken mit den verschiedenen Schichten benötigt werden und für die Winkel in den verschiedenen Systemen Beziehungen bekannt sind.

Die Charakteristiken im Eulersystem sind Geraden. Für eine tangentielle Charakteristik nimmt  $\mu$  im Punkt der Tangente den Wert null an und ist in höheren Schichten gegeben durch die Formel:

$$\mu_E(r) = \pm \sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}$$

Dabei ist  $p$  der Radius der tangierten Schicht und entspricht dem Stoßparameter der Charakteristik. Das positive Vorzeichen beschreibt den auslaufenden Teil der Charakteristik, während das negative den einfallenden Teil beschreibt.

Wegen der Bedingung, dass  $\mu_E$  im tangentialen Punkt verschwindet, folgt unter Verwendung der Inversion von (B.6) in Anhang B:

$$\mu(r) \Big|_p = -\beta(p)$$

Somit gilt über (4.5):

$$\frac{\partial r}{\partial s} \Big|_s = 0$$

Daher ist am Punkt der Tangente die Pfadlänge  $s$  im Langrangesystem gleich null. Im Langrangesystem steht  $\mu$  für jeden Radius über die inverse Transformation zur Verfügung:

$$\mu(r) = \frac{\mu_E(r) - \beta(r)}{1 - \beta(r)\mu_E(r)}$$

Den Charakteristiken, die durch den Kern verlaufen, kann genauso ein tiefenabhängiges  $\mu$  zugeordnet werden, wenn  $p$  für die Charakteristik bekannt ist.

Daher sind die Winkel der Charakteristiken in jeder Schicht bekannt. Der Verlauf zwischen den Schichten wird interpoliert.

#### 4.4 Die formale Lösung für statische Medien

Die Strahlungstransportgleichung wird entlang von Lichtwegen durch die Atmosphäre mittels einer Charakteristik-Methode gelöst [Olson *et al.*, 1986].

Sind die Quellfunktion, die Opazitäten und die eingestrahlte Intensität als Randbedingung bekannt, so ist die Entwicklung der monochromatischen Intensität entlang der Charakteristik analytisch gegeben durch:

$$I_\lambda(\tau_i) = I_\lambda(\tau_{i-1}) \exp(\tau_{i-1} - \tau_i) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} S_\lambda(\tau) \exp(\tau - \tau_i) d\tau \quad (4.7)$$

$$I_\lambda(\tau_i) \equiv I_\lambda(\tau_{i-1}) \exp(\tau_{i-1} - \tau_i) + \Delta I_\lambda(\tau_i) \quad (4.8)$$

Der erste Teil in (4.8) beschreibt die Absorption der einfallenden Intensität und der zweite Teil die von der optischen Tiefe abhängende Dämpfung der vom Medium abgegebenen Intensität.

Bei der numerischen Behandlung sind die physikalischen Größen nur an diskreten Orten in der Atmosphäre bekannt. Daher wird der Verlauf der benötigten Größen zwischen den Schichten mittels Interpolation bestimmt. Die optische Tiefe wird linear zwischen zwei Schichten interpoliert. Die geometrische Länge zwischen zwei diskreten Punkten in der Atmosphäre muss daher bekannt sein. Diese Strecken folgen aus (4.6), da die Winkel an den verschiedenen Schichten bekannt sind. Bei der Quellfunktion wird sowohl lineare als auch parabolische Interpolation verwendet.<sup>2</sup>

Das Integral über die Quellfunktion in (4.7) mit der interpolierten Quellfunktion ist analytisch. Es hängt von den diskreten Werten der optischen Tiefe und der Quellfunktion ab. Diese Abhängigkeit ist in jedem Punkt der Atmosphäre dieselbe:

$$\Delta I_\lambda(\tau_i) = \alpha(\tau_i) S_\lambda(\tau_{i-1}) + \beta(\tau_i) S_\lambda(\tau_i) + \gamma(\tau_i) S_\lambda(\tau_{i+1})$$

Im Falle von linearer Interpolation der Quellfunktion ist  $\gamma(\tau)$  identisch null. Die Entwicklung der monochromatischen Intensität entlang einer bestimmten Charakteristik ist daher durch die Angabe eines  $\alpha\beta\gamma$ -Tripels in jeder Schicht der Atmosphäre, die durch die Charakteristik geschnitten wird, bekannt.

<sup>2</sup>Bei der Verwendung der linearen Interpolation werden negative Werte der Quellfunktion vermieden. Bei parabolischer Interpolation von Punkten, deren Funktionswerte in der Nähe von null liegen, kann die interpolierte Funktion auch negative Werte annehmen, obwohl alle interpolierten Werte positiv sind.

In jedem Schnittpunkt einer Charakteristik mit einer diskreten Schicht ist nicht nur die Intensität, sondern auch der Winkel zu der Schichtnormalen bekannt. Werden alle Schnittpunkte der gegebenen Schicht betrachtet, so erhält man eine diskrete Winkelauflösung des Strahlungsfeldes dieser Schicht.

Das Strahlungsfeld der Atmosphäre ist somit vollständig bekannt.

Bei den Charakteristiken müssen zwei Fälle unterschieden werden. Erstens diejenigen Lichtwege, die eine Schicht in einem Punkt tangential berühren, und zweitens Lichtwege, die durch den Kern der Atmosphäre verlaufen. Der Kern der Atmosphäre ist der Rest der Supernova, der unterhalb der untersten Schicht liegt. Dort entspricht das Strahlungsfeld in sehr guter Näherung dem eines schwarzen Körpers.

Die kernschneidenden Charakteristiken werden durch den Kern der Supernova in zwei Teile aufgeteilt. Die Randbedingung für den zweiten Teil der Charakteristik ist wegen des Planckschen Strahlungsfeldes durch die Diffusionsnäherung gegeben.

Als Randbedingung für den ersten Teil und die tangentielle Charakteristik wird eine auf die Atmosphäre einfallende Intensität je nach äußeren physikalischen Bedingungen vorgegeben und hier als null angenommen.

## 4.5 Die formale Lösung für expandierende Medien

In der Gleichung (4.7) wird eine Strahlungstransportgleichung in der Form

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau} = I_\lambda - S_\lambda \quad (4.9)$$

angenommen. Die Strahlungstransportgleichung für bewegte Medien (siehe 3.60) lautet:

$$\frac{dI_\lambda}{ds} + a_\lambda \frac{\lambda I_\lambda}{\partial \lambda} + 4a_\lambda I_\lambda = \eta_\lambda - \chi_\lambda I_\lambda \quad (4.10)$$

Von (4.10) gelangt man zu (4.9) mittels der Definition:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_\lambda &= \chi_\lambda + 4a_\lambda \\ d\tau &= -\hat{\chi}_\lambda ds \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau} = \frac{\chi_\lambda + 4a_\lambda}{\hat{\chi}_\lambda} I_\lambda - \frac{\eta_\lambda}{\hat{\chi}_\lambda} + \frac{a_\lambda}{\hat{\chi}_\lambda} \frac{\partial \lambda I_\lambda}{\partial \lambda} \quad (4.11)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI_\lambda}{d\tau} = I_\lambda - \hat{S}_\lambda \quad (4.12)$$

mit  $\hat{S}_\lambda = \frac{1}{\hat{\chi}_\lambda} \left\{ \eta_\lambda - a_\lambda \frac{\partial \lambda I_\lambda}{\partial \lambda} \right\}$ . In dieser Gestalt hat die Strahlungstransportgleichung für bewegte Medien die gesuchte Form (4.9).

Die formale Lösung für statische Medien ist daher ebenfalls für expandierende Medien anwendbar. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass sich die Formeln für die  $\alpha\beta\gamma$ -Tripel ändern, da die Quellfunktion aus zwei Anteilen besteht:

$$\widehat{S}_\lambda = \bar{S}_\lambda + \widetilde{S}_\lambda$$

die jeweils verschieden interpoliert werden können. Der zweite Anteil  $\widetilde{S}_\lambda$  enthält eine Ableitung der Intensität nach der Wellenlänge. Eine Diskretisierung dieser Ableitung mittels Differenzenquotienten führt zu einem Anfangswertproblem. Die formale Lösung bei einer gegebenen Wellenlänge hängt dann von den Werten der Intensität am vorhergehenden Wellenlängengitter ab. Dabei wird das sortierte Wellenlängengitter von kleinen zu großen Wellenlängen durchlaufen.

In dem beschriebenen Fall wird die Diskretisierung der Wellenlängenableitung auf einen Zeitpunkt nach der Interpolation verschoben. Es ist auch möglich, die Diskretisierung vor der Interpolation durchzuführen. In diesem Fall sind die Ergebnisse aber weniger genau, da bei Unregelmäßigkeiten im Wellenlängengitter Pseudolinienmerkmale entstehen können. Das erstgenannte Verfahren kann aber unter Umständen Instabilitäten zeigen, die bei einer Kombination der beiden Methoden abgefangen werden können [Hauschildt und Baron, 2004].

## 4.6 Die $\Lambda$ -Iteration

Der  $\Lambda$ -Operator wurde bei der Integration der formalen Lösung der planparallelen Strahlungstransportgleichung unter der Annahme einer affin-linearen Quellfunktion definiert. Die Momente dieser Lösung sind die Schwarzschild-Milne-Gleichungen [Mihalas, 1970].

Der Zusammenhang zwischen dem nullten Moment der Intensität  $J(\tau)$  und der Quellfunktion  $S(\tau)$  ist nur formal, da er implizit ist. Er wird in Operatornotation wie folgt geschrieben:

$$J(\tau) = \Lambda_\tau [S]$$

Eine analytische Lösung der Strahlungstransportgleichung ist wegen des impliziten Charakters der formalen Lösung nur für Spezialfälle möglich. Die Lösung kann jedoch mittels numerischer Methoden gefunden werden. Der  $\Lambda$ -Operator entspricht daher der Wirkung des gesamten numerischen Prozesses. Bei einer gegebenen numerischen Lösungsmethode ist daher auch der  $\Lambda$ -Operator bekannt.

In der Praxis ist ein solcher  $\Lambda$ -Operator nicht verwendbar. Wird Streuung im Strahlungstransport berücksichtigt, durchlaufen Photonen in der Atmosphäre größere optische Entfernungen, ohne zerstört zu werden. Diese Photonen koppeln verschiedene Regionen der Atmosphäre aneinander. Die  $\Lambda$ -Iteration benötigt zu lange, um die Wirkung solcher Photonen an alle Regionen untereinander zu vermitteln. Die Zahl der nötigen Iterationsschritte ist daher sehr groß. Weiterhin unterscheiden sich die Korrekturen an der gemittelten Intensität bei fortgeschrittener Iteration kaum. Mathematisch liegt dies daran, dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix sehr nahe bei eins liegen, weswegen sich die Iterationen wenig unterscheiden. Die Berechnung nach dieser Methode scheint dann bereits konvergiert zu sein, obwohl sie sich noch weit von der Lösung entfernt befindet. Die  $\Lambda$ -Iteration ist daher nicht ohne weiteres zur Lösung der Strahlungstransportgleichung einsetzbar.



## 4.7 Die »operator splitting« Methode

Um das Strahlungstransportproblem zu lösen, muss die  $\Lambda$ -Iteration so modifiziert werden, dass sich das Konvergenzverhalten verbessert.

Dies gelingt durch ein Aufspalten des Operators [Cannon, 1973]:

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*) \quad (4.13)$$

Der Operator  $\Lambda^*$  ist der approximierte  $\Lambda$ -Operator (»approximate  $\Lambda$ -operator«), weswegen diese Methode in Kurzform auch ALI-Methode (»approximate lambda iteration«) genannt wird. Durch die Aufspaltung ändert sich mathematisch nichts, somit auch nichts am Konvergenzverhalten. Der mögliche Unterschied zur  $\Lambda$ -Iteration wird bei einer ausführlicheren Schreibweise deutlich:

$$\begin{aligned} J_\lambda^{\text{neu}} &= \Lambda_\lambda \left[ S_\lambda^{\text{alt}} \right] \\ \Rightarrow J_\lambda^{\text{neu}} &= \Lambda_\lambda^* \left[ S_\lambda^{\text{alt}} \right] + (\Lambda_\lambda - \Lambda_\lambda^*) \left[ S_\lambda^{\text{alt}} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Im Folgenden ist  $S_\lambda$  immer als Argument eines Operators zu verstehen. Wird das Argument des ersten angenäherten Operators durch die noch unbekannte Quellfunktion ersetzt:

$$J_\lambda^{\text{neu}} = \Lambda_\lambda^* S_\lambda^{\text{neu}} + (\Lambda_\lambda - \Lambda_\lambda^*) S_\lambda^{\text{alt}} \quad (4.15)$$

so ist dies zwar mathematisch nicht korrekt, doch im Falle der Konvergenz sind  $S_\lambda^{\text{neu}}$  und  $S_\lambda^{\text{alt}}$  identisch, und der Ausdruck (4.15) geht in den mathematisch exakten (4.14) über.

Aus der neu berechneten mittleren Intensität  $J_\lambda^{\text{neu}}$  folgt die neue Quellfunktion  $S_\lambda^{\text{neu}}$  über:

$$S_\lambda^{\text{neu}} = (1 - \epsilon) J_\lambda^{\text{neu}} + \epsilon B \quad (4.16)$$

Unter Ausnutzung der Linearität von  $\Lambda$  und  $\Lambda^*$ , sowie der Relation (4.16) folgt:

$$J_\lambda^{\text{neu}} = [1 - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^*]^{-1} \left\{ \Lambda_\lambda S_\lambda^{\text{alt}} - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^* J_\lambda^{\text{alt}} \right\} \quad (4.17)$$

Der Vorteil der ALI-Methode gegenüber der unmodifizierten Methode ist aus der Differenz von  $J_\lambda^{\text{neu}}$  und  $J_\lambda^{\text{alt}}$  ersichtlich. Aus (4.17) folgt:

$$[1 - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^*] J_\lambda^{\text{neu}} = J_\lambda^F - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^* J_\lambda^{\text{alt}} \quad (4.18)$$

$$= J_\lambda^F - J_\lambda^{\text{alt}} + [1 - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^*] J_\lambda^{\text{alt}} \quad (4.19)$$

$$\rightarrow \delta J_\lambda = [1 - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^*]^{-1} \left\{ J_\lambda^F - J_\lambda^{\text{alt}} \right\} \quad (4.20)$$

mit  $J_\lambda^F = \Lambda_\lambda S_\lambda^{\text{alt}}$  als formale Lösung und  $\delta J_\lambda = J_\lambda^{\text{neu}} - J_\lambda^{\text{alt}}$ . Die Matrix

$$[1 - (1 - \epsilon)\Lambda_\lambda^*]^{-1}$$

verstärkt offensichtlich die Konvergenz der herkömmlichen  $\Lambda$ -Iteration mit  $\delta J_\lambda = J_\lambda^F - J_\lambda^{\text{alt}}$ . Mathematisch bedeutet dies, dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix nun deutlich kleiner als eins sind, was nach dem Theorem von Gershgorin [Hauschildt, 1992] nach einer Verkleinerung der Diagonalelemente des Operators folgt.

An die Eigenschaften von  $\Lambda^*$  sind bisher keine Bedingungen gestellt worden. Die Wahl von  $\Lambda^*$  ist völlig beliebig. Als ideal erweisen sich solche  $\Lambda^*$ -Operatoren, die aus Elementen der originalen  $\Lambda$ -Matrix aufgebaut sind. Für  $\Lambda^*$  identisch null ändert sich nichts. Für andere Operatoren bis hin zu der Identität mit  $\Lambda$  ist die Konvergenz beschleunigt.

Die Darstellung des  $\Lambda$ -Operators ist aber nur symbolisch zu verstehen; die Komponenten selbst sind unbekannt. Mit der formalen Lösung ist jedoch die Wirkung des Operators bekannt. Die Wirkung der formalen Lösung auf eine Testquellfunktion gibt die Möglichkeit, die Komponenten von  $\Lambda$  zu berechnen. Formal gilt für eine Quellfunktion, die bis auf die  $j$ -te Stelle überall gleich null ist:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{1j} \\ \Lambda_{2j} \\ \vdots \\ \Lambda_{ij} \end{pmatrix} = \Lambda_{ij} \cdot (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (4.21)$$

Wird die formale Lösung für alle Schichten durchgeführt, erhält man die komplette  $\Lambda$ -Matrix. Um nur bestimmte Bänder zu berechnen, kann die formale Lösung in einer Schicht frühzeitig abgebrochen werden.

Somit kann der  $\Lambda^*$ -Operator mittels der formalen Lösung konstruiert und eine beschleunigte  $\Lambda$ -Iteration durchgeführt werden [Olson und Kunasz, 1987] [Hauschildt, 1992].

Vom Konvergenzverhalten her ist die Wahl des ursprünglichen Operators ideal. Doch wird für die Konstruktion des  $\Lambda$ -Operators pro Schicht der Atmosphäre eine formale Lösung benötigt.

Stattdessen werden Diagonal- oder Mehrfachdiagonal-Operatoren gewählt. Die Anzahl der Diagonalen bestimmt die Bandbreite des Operators.

Zwischen dem Zeitverlust der Konstruktion des Operators und dem Gewinn in verbesserter Konvergenz bei größerer Bandbreite existiert ein Optimum in der Rechenzeit. Diese optimale Bandbreite ist von dem behandelten Problem und dem verwendeten Rechner abhängig. In den meisten Fällen ist ein tridiagonaler  $\Lambda^*$ -Operator am besten geeignet [Hauschildt *et al.*, 1994].

## 4.8 Die Iteration der Ratengleichung

Um die Strahlungstransportgleichung (3.60) zu lösen, müssen die Besetzungszahlen bekannt sein, da diese die Emissivität und die Extinktion bestimmen.

Die Besetzungszahlen sind aber selbst von dem Strahlungsfeld abhängig. Die radiativen Raten der induzierten Emission und der Absorption hängen linear von der mittleren Intensität ab, die ihrerseits über den  $\Lambda$ -Operator von der Quellfunktion abhängt. Die Raten wiederum bestimmen die Quellfunktion, so dass die Bestimmung der Besetzungszahlen einer  $\Lambda$ -Iteration entspricht, die jedoch aufgrund des schlechten Konvergenzverhaltens (siehe Abschnitt 4.6) in dieser Form nicht verwendbar ist.

Analog zum  $\Lambda$ -Operator wird ein Ratenoperator  $\hat{R}$  definiert, der formal aus einem Besetzungsvektor  $[n]$ , bestehend aus den Besetzungszahlen aller Niveaus in allen Schichten, die

radiativen Raten liefert [Hauschildt, 1993]:

$$R_{ij} = \widehat{R}_{ij}[n]$$

Die Indizes  $i$  und  $j$  stehen hierbei stellvertretend für alle möglichen Übergänge.  $\widehat{R}$  ist formal durch

$$\widehat{R}_{ij}[n] = \int B_{ij}\Phi(E)\Lambda[S[n]] dE \quad (4.22)$$

gegeben, wobei  $E$  die Energie der Photonen,  $B_{ij}$  ein Wirkungsquerschnitt und  $\Phi$  eine Profildfunktion ist.

Bisher wurde die Operatorgleichung nur umgeschrieben, so dass sich das Konvergenzverhalten nicht verbessert hat, da es sich immer noch um eine  $\Lambda$ -Iteration handelt.

Unter der Annahme, dass die Extinktion  $\chi$  genügend gut durch die alten Besetzungszahlen bestimmt ist, wird durch Modifikation des  $\Lambda$ -Operators  $\Psi = \Lambda/\chi$  die Wirkung des Operators auf die Emissivitäten  $\eta([n]) = \widehat{E}[n]$  reduziert:

$$\widehat{R}_{ij}[n] = \left\{ \int B_{ij}\Phi(E)\Psi\widehat{E}dE \right\} [n] \quad (4.23)$$

In Abschnitt 4.7 wurde das Prinzip der Aufspaltung von Operatoren durch einen angenäher-ten Operator vorgestellt. Dieses Prinzip kommt auch hier zur Anwendung:

$$R_{ij} = \widehat{R}_{ij}^*[n_{\text{neu}}] + \Delta\widehat{R}_{ij}[n_{\text{alt}}] \quad (4.24)$$

Über die Natur des hier verwendeten  $\widehat{R}_{ij}$ -Operators wurde noch keine Annahme gemacht. Prinzipiell ist jede formale Lösung des Strahlungstransportproblems verwendbar. In diesem Fall wird die Methode aus Abschnitt 4.4 benutzt.

Die Raten sind nicht von den Besetzungszahlen unabhängig, so dass die Bestimmung der Besetzungszahlen aus der Ratengleichung (3.32) ein in  $n_{\text{neu}}$  und der Elektronendichte  $n_e$  (siehe (3.37) und (3.38)) nichtlineares Problem ist.

Die Nichtlinearitäten der Form  $n_{\text{neu}}\widehat{R}[n_{\text{neu}}]$  werden durch eine Ersetzung der Form  $n_{\text{alt}}\widehat{R}[n_{\text{neu}}]$  umgangen.

Für einen betrachteten Ionisationszustand folgt daher für jedes betrachtete Niveau eine Ratengleichung, die als Randbedingungen die Ladungserhaltung und die Elementhäufigkeit besitzt.

Auf die normalerweise im LTE betrachteten Elektronen hat das NLTE unter Umständen einen so großen Einfluss, dass die Elektronenanzahldichte  $n_e$  nicht als gegeben angesehen werden kann, sondern konsistent bestimmt werden muss. Um die Lösung von nichtlinearen Systemen zu vermeiden, wird  $n_e$  vorgegeben und die Ratengleichung gelöst. Mit der Kenntnis der Besetzungszahlen aller Niveaus ist die daraus folgende Elektronendichte bekannt. Die so ermittelte Dichte dient als neuer Startwert für die Lösung der Ratengleichungen, bis  $n_e$  konvergiert ist.

## 4.9 Temperaturkorrektur nach Unsöld-Lucy

Bei der Modellierung von Atmosphären muss darauf geachtet werden, dass das Ergebnis physikalisch konsistent ist. Insbesondere muss die Bedingung der Energieerhaltung erfüllt sein. Daher wird bei jeder Iteration des Modells die Temperaturverteilung in der Atmosphäre korrigiert. Nur wenn die Korrektur der Temperatur unter Beachtung der Energieerhaltung genügend klein wird, kann das Modell in sich physikalisch konsistent sein.

Bei statischen Atmosphären muss die Bedingung des radiativen Gleichgewichts erfüllt sein; die Temperaturverteilung wird dann so korrigiert, dass die Bedingung lokal erfüllt ist. Eine Methode zur Temperaturkorrektur für graue Atmosphären wurde von Unsöld vorgestellt und von Lucy für nichtgraue Atmosphären weiterentwickelt [Mihalas, 1970]. Für die Temperaturkorrektur in einer Supernovahülle wird eine verallgemeinerte Unsöld-Lucy-Methode verwendet. Dabei werden die gemittelten Opazitäten (3.47) bis (3.49) verwendet, da die Temperaturstruktur nicht stark von den genauen Werten der Opazitäten abhängt und die Methode dadurch robuster wird.

### 4.9.1 Die Unsöld-Lucy-Methode

Aus (C.9) und den Beziehungen (C.16) und (C.18) in Anhang C folgen die Momentengleichungen der Strahlungstransportgleichung im Eulersystem bei Mittelung der Opazitäten zu:

$$i = 0 \quad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 H) = -r^2 \kappa_P \left\{ \frac{\kappa_J}{\kappa_P} J - B \right\} \quad (4.25)$$

$$i = 1 \quad \frac{\partial}{\partial r} K + \frac{3}{r} K - \frac{J}{r} = -\kappa_H H \quad (4.26)$$

Im Folgenden wird weiter nur das Eulersystem berücksichtigt, so dass nur statische Medien betrachtet werden. Nach der Verwendung des Eddingtonfaktors  $f = \frac{K}{J}$  und des Sphäritätsfaktors  $q^3$ :

$$q = \frac{r_c^2}{r^2} \exp \int_{r_c}^r \frac{3f - 1}{r' f} dr'$$

folgt nach der Multiplikation der Gleichungen (4.25) und (4.26) mit  $q$ :

$$i = 0 \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \tau} = \left( \frac{\kappa_H}{\kappa_P} \mathfrak{J} - \mathfrak{B} \right) \quad (4.27)$$

$$i = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (q f \mathfrak{J}) = q \frac{\kappa_H}{\kappa_P} \mathfrak{H} \quad (4.28)$$

mit  $d\tau = -\kappa_P dr$  und  $[\mathfrak{H}, \mathfrak{J}, \mathfrak{B}] \equiv r^2 [H, J, B]$ . Bei statischen Modellen wird ein Fluss  $H$  vorgegeben. Dieser Fluss ist wegen des radiativen Gleichgewichtes unabhängig von der Tiefe. Das Ziel einer Temperaturkorrektur und damit auch einer Korrektur der Planckfunktion  $B$  ist es, bei der folgenden Iteration den vorgegebenen Fluss in jeder Tiefe zu erhalten.

<sup>3</sup>Der in der Definition von  $q$  verwendete Radius  $r_c$  ist der Radius des Kerns der Atmosphäre. Daher ist  $q$  auch ein Maß für die Sphärität des betrachteten Systems.

Unter der Annahme, dass sich die Verhältnisse der Opazitäten, der Eddingtonfaktor und der Sphäritätsfaktor von Iteration zu Iteration nicht ändern, können die Gleichungen (4.27) und (4.28) aus der momentanen und der folgenden Iteration subtrahiert werden:

$$i = 0 \quad \frac{\partial \Delta \mathfrak{J}}{\partial \tau} = \left( \frac{\kappa_{\text{H}}}{\kappa_{\text{P}}} \Delta \mathfrak{J} - \Delta \mathfrak{B} \right) \quad (4.29)$$

$$i = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (qf \Delta \mathfrak{J}) = q \frac{\kappa_{\text{H}}}{\kappa_{\text{P}}} \Delta \mathfrak{J} \quad (4.30)$$

Gleichung (4.30) kann über  $\tau$  integriert werden. Das Ergebnis  $\Delta \mathfrak{J}$  in (4.29) eingesetzt liefert nach Umformung und Ausnutzung der Tiefenunabhängigkeit des Zielflusses in (4.27) die Korrektur der Planckfunktion:

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{B}(\tau) &= \frac{\kappa_{\text{H}}}{\kappa_{\text{P}}} \mathfrak{J}(\tau) - \mathfrak{B}(\tau) \\ &\quad - \frac{\kappa_{\text{J}}}{\kappa_{\text{P}}} \frac{1}{q(\tau)f(\tau)} \left\{ q(0)f(0)\Delta \mathfrak{J} + \int_0^\tau q(\tau') \frac{\kappa_{\text{H}}(\tau')}{\kappa_{\text{P}}(\tau')} \Delta \mathfrak{J}(\tau') d\tau' \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Da alle Größen auf der rechten Seite von (4.31) am Ende einer Iteration zur Verfügung stehen, ist die tiefenabhängige Temperaturkorrektur bekannt:

$$\Delta T(\tau) = \frac{1}{r^2} \frac{\Delta \mathfrak{B}(\tau)}{4\sigma T^3(\tau)} \quad (4.32)$$

In (4.31) muss im Fall von nichtthermischen Energiequellen noch ein positiver Term hinzugefügt werden. Z.B. findet in Supernovae Ionisation durch Strahlung aus radioaktiven Zerfällen statt, die hier berücksichtigt werden muss. Es tritt somit zusätzlich folgender Term auf:

$$\frac{1}{\kappa_{\text{P}}} \frac{\dot{S}}{4\pi}$$

$\dot{S}$  ist hierbei ein Ausdruck, der die Deponierung von Energie im Medium beschreibt.

#### 4.9.2 Verallgemeinerte Unsöld-Lucy-Methode für expandierende Medien

Bei expandierenden Atmosphären ist die Bedingung eines radiativen Gleichgewichts, also eines tiefenunabhängigen Flusses, nicht gegeben.

Bei der Temperaturkorrektur werden über alle Winkel und Frequenzen integrierte Größen verwendet, so dass die Methode der Temperaturkorrektur auch bei expandierenden Atmosphären funktioniert, da keine Annahmen über den Bewegungszustand eingehen. Jedoch wird hierfür die Kenntnis des angestrebten Flusses in Abhängigkeit von der optischen Tiefe benötigt [Baron *et al.*, 2003].

Wird im Lagrangesystem radiatives Gleichgewicht angenommen — jedes Volumenelement absorbiert und emittiert gleichviel Energie — so kann der tiefenabhängige Fluss bestimmt werden. Die Differenz der Raten von Energieerzeugung und Vernichtung pro Volumen verschwindet in diesem Fall. Diese Differenz ist jedoch nach Definition die kovariante Ableitung

nach der Zeit des Strahlungsenergieimpulstensors (C.7), also in sphärischer Symmetrie und angenommener Zeitunabhängigkeit identisch mit (siehe (C.9)):

$$q^0 = \frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2}{r} H \right\} \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Bedingung muss mit bewegten Größen ausgedrückt werden, da die Bedingung für radiatives Gleichgewicht im Ruhesystem bewegter Größen gilt. Über (3.61) steht eine solche Beschreibung zur Verfügung, so dass folgt:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial r}(r^2 H') + \beta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 J') + \beta r(J' - K') \\ & + \gamma^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} r^2 (J' + K' + 2\beta H') \end{aligned} \quad (4.33)$$

Unter der Annahme, dass die Geometriefaktoren  $f = \frac{J}{H}$  und  $g = \frac{K}{H}$  unabhängig von der Temperatur sind, ist  $H'(\tau = 0)$  über die Inversion von (3.61) gegeben, da  $H(\tau = 0) = H_0$  im Laborsystem als Modellparameter vorgegeben wird:

$$H'(0) = \gamma^2 \{ (1 - \beta^2) H_0 - \beta H_0 (f + g) \}$$

Es ergibt sich eine Randbedingung für die Differentialgleichung (4.33), woraus nach sukzessiver Anwendung der tiefenabhängigen Fluss  $H'(\tau)$  folgt. Die Temperaturkorrektur mittels (4.32) ist damit bestimmt.

## 4.10 Globales Iterationsschema von PHOENIX

In den letzten Abschnitten wurden einzelne Schritte für die Berechnung eines Modells einer Supernova vorgestellt. An dieser Stelle wird nun ein Gesamtüberblick über das gesamte Iterationsschema gegeben. Dieses ist in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt.

Das Supernova-Atmosphärenmodell ist grundlegend durch seine Temperaturstruktur  $T_i$  und den Besetzungszahldichten  $[n]$ , sowie den LTE Besetzungszahlen gegeben. Diese Werte werden beim Iterationsprozess solange verbessert, bis die Temperaturstruktur konvergiert ist. Aus der Temperatur wird der Gasdruckverlauf aus der idealen Gasgleichung und dem vorgegebenen Dichteverlauf bestimmt. Die Änderungen des Gasdrucks verändern die Besetzungszahlen.

Für jeden Wellenlängenpunkt wird nun das Strahlungsfeld mit Hilfe der ALI-Methode berechnet. Dieses Ergebnis liefert die verbesserten Intensitäten für die Iteration der Ratengleichung mittels der Ratenoperatoren. Die Ratengleichungen werden solange iteriert, bis die Elektronendichte konvergiert ist. Hieraus folgen dann die neuen  $[n]$ .

Aus dem neu errechneten Strahlungsfeld wird mittels der Temperaturkorrektur eine neue Temperaturstruktur  $T_i$  berechnet. Die neuen Ergebnisse von  $T_i$  und  $[n]$  dienen dann wiederum als neue Startwerte für den Iterationsprozess, falls sie noch nicht konvergiert sind.

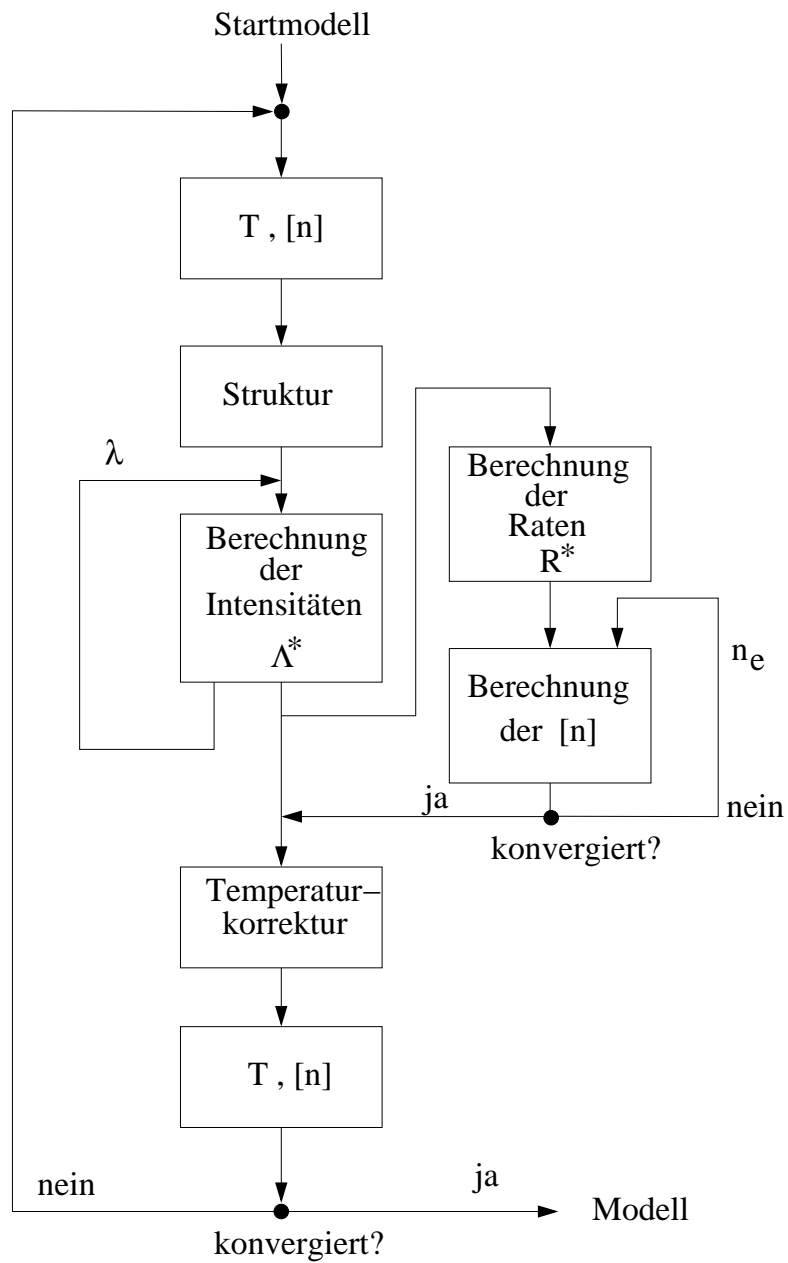
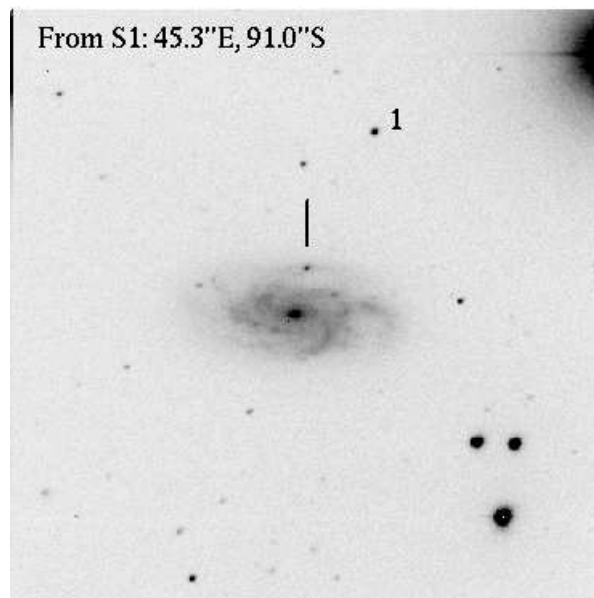


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des Iterationsverlaufs.

## Kapitel 5

# Die Supernova SN 2003Z

Die SN 2003Z wurde am 29.7 (UT) Januar 2003 von Y. L. Qiu und J. Y. Hu am Beijing Astronomical Observatory (BAO, heute NAOC) mit dem BAO-0.6-m-Teleskop entdeckt. Die Supernova liegt in der Nähe der Galaxie NGC 2742. Sie hat im Äquatorialsystem des Jahres 2000 eine Rektaszension von 09h07m32s,46 und eine Deklination von  $+60^{\circ}29'17''.5$ . Gegenüber dem Zentrum von NGC 2742 ist sie um  $8''.4$  westlich und  $31''.0$  nördlich verschoben. Durch ihr Spektrum wurde sie als Supernova vom Typ II klassifiziert [Boles *et al.*, 2003] [Matheson *et al.*, 2003].



**Abbildung 5.1:** Die Supernova SN 2003Z in der Galaxie NGC 2742 aufgenommen von dem KAIT-Projekt am Lick-Observatory [KAIT, ]. Das Bild stammt von [ASRAS, ].



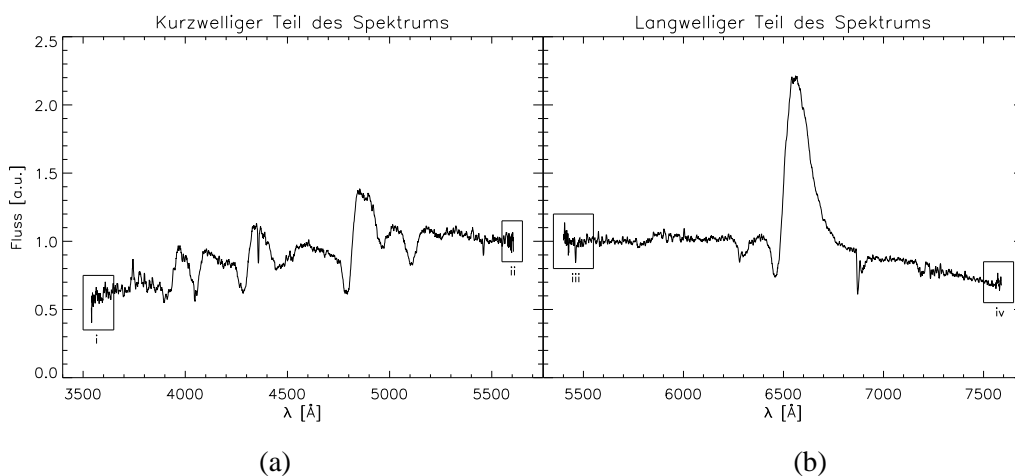
## 5.1 Die gemessenen Spektren

Die zur Verfügung stehenden Spektren der SN 2003Z wurden an fünf verschiedenen Tagen auf dem Calar Alto in Spanien mit dem 3.5-Meter-Teleskop und dem TWIN Spektrographen aufgenommen. Die Beobachtungstage waren der vierte, fünfte, neunte, zehnte und der elfte Februar 2003.

TWIN teilt das einfallende Licht in zwei separate Strahlen, wobei die Teilungswellenlänge variabel ist. Die Strahlen werden in zwei optische Kanäle, einen roten und einen blauen, geleitet. In jedem Kanal wird ein eigenes Spektrum aufgenommen.

Der Wellenlängenbereich des blauen Kanals umfasst bei den vorliegenden Spektren Wellenlängen von ungefähr 3540 bis 5605 Å, während der rote Kanal Wellenlängen von ungefähr 5400 bis 7590 Å beinhaltet. Im Fall des zehnten Februar liegt die obere Grenze des roten Kanals jedoch nur bei 7490 Å, der blaue Kanal am elften Februar umfasst nur Wellenlängen bis zu ca. 3645 Å als untere Grenze.

Die Spektren haben eine variable Auflösung  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ . Die Auflösung reicht von  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 3300$  bei  $\lambda = 3544$  Å bis zu  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 6830$  bei  $\lambda = 7589$  Å. An den Wellenlängengrenzen des Empfindlichkeitsbereichs des Spektrographen nimmt die Qualität des Spektrums ab. Dies ist in den von *i* bis *iv* gekennzeichneten Bereichen in Abbildung 5.2 dargestellt.



**Abbildung 5.2:** In (a) ist der kurzwellige Teil des unkorrigierten Spektrums der Supernova SN 2003Z am vierten Februar dargestellt. In (b) sieht man den rechten Teil des Spektrums. Die Kästen *i* bis *iv* markieren die Teile des Spektrums, deren Qualität nicht der des übrigen Spektrums entspricht.

Die beobachteten Spektralbereiche überlappen jedoch so stark, dass die nicht vertrauenswürdigen Abschnitte des Spektrums (*i*) bis (*iv*) (siehe Abbildung 5.2) ohne Verlust der Überdeckung des Wellenlängenbereichs entfernt wurden. Die Bereiche (*ii*) und (*iii*) liegen außerdem im Kontinuum, so dass deren Entfernung keine Spektrallinien beeinflusst.

Da die Supernova SN 2003Z in der Nähe der Galaxie NGC 2742 entdeckt wurde und sie in einem ihrer Spiralarme zu liegen scheint, wird die Supernova mit der Galaxie assoziiert (siehe Abbildung 5.1). Der Galaxie NGC 2742 wird ein Farbexzess von  $E(B - V) = 0.039^m$  und eine heliozentrische Rotverschiebung von  $z = 0.00430 \pm 0.00002$  zugeordnet [Schlegel *et al.*, 1998].

Zum Zeitpunkt der Beobachtung im Februar 2003 bewegte sich die Erde zusätzlich mit ca. 22km/s von NGC 2742 fort, so dass die Rotverschiebung noch geringfügig vergrößert wird ( $z = 0.00437 \pm 0.00002$ ).

Diese Werte werden aus Mangel an genaueren Werten für die SN 2003Z übernommen. Wegen der Eigenbewegung und der interstellaren Materie in der Nähe der Supernova sind die Unsicherheiten dieser Werte allerdings sehr groß.

Die gemessenen Spektren werden mittels des für die Galaxie NGC 2742 bekannten Farbexzesses entrotet. Dies ergibt einen höheren Fluss im blauen Wellenlängenbereich. Die Korrektur der Rotverschiebung ergibt eine Verschiebung des Spektrums zu kürzeren Wellenlängen. In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse der Korrekturen in einer Grafik am Beispiel des vierten Februar dargestellt. Das Verhältnis der Linienstärken wird durch die Korrekturen nicht messbar beeinflusst. Das in der Abbildung entrotete Spektrum ist bereits für die Rotverschiebung korrigiert worden.

In Abbildung 5.4 sind die korrigierten Spektren der ersten drei Beobachtungstage und in Abbildung 5.5 die der letzten beiden Beobachtungstage dargestellt.

Eine Identifikation der Spektrallinien durch Vergleich mit Literaturwerten der Wellenlängen von Übergängen ist unmöglich. Dies liegt daran, dass das Spektrum von einer bewegten Atmosphäre ausgesendet wird. Es ist damit keine einfache Überlagerung von Spektrallinien, denen jeweils eine feste Wellenlänge zugeordnet werden kann. Stattdessen wirkt aufgrund des Geschwindigkeitsprofils der Atmosphäre ein ganzer Bereich von Wellenlängen auf eine beobachtete Wellenlänge ein, indem sich verschiedene Spektrallinien gegenseitig überblenden. An einer anscheinend einzelnen Spektrallinie können daher mehrere verschiedene Übergänge beteiligt sein, so dass eine Identifikation nicht ohne weiteres möglich ist.

Einzig die starke Emissionslinie bei  $\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$  kann als  $H_\alpha$ -Linie identifiziert werden. Dies liegt weniger an der groben Übereinstimmung der Wellenlänge mit dem Literaturwert von  $6563 \text{ \AA}$ , als an der Erwartung, die Linie zu sehen.<sup>1</sup>

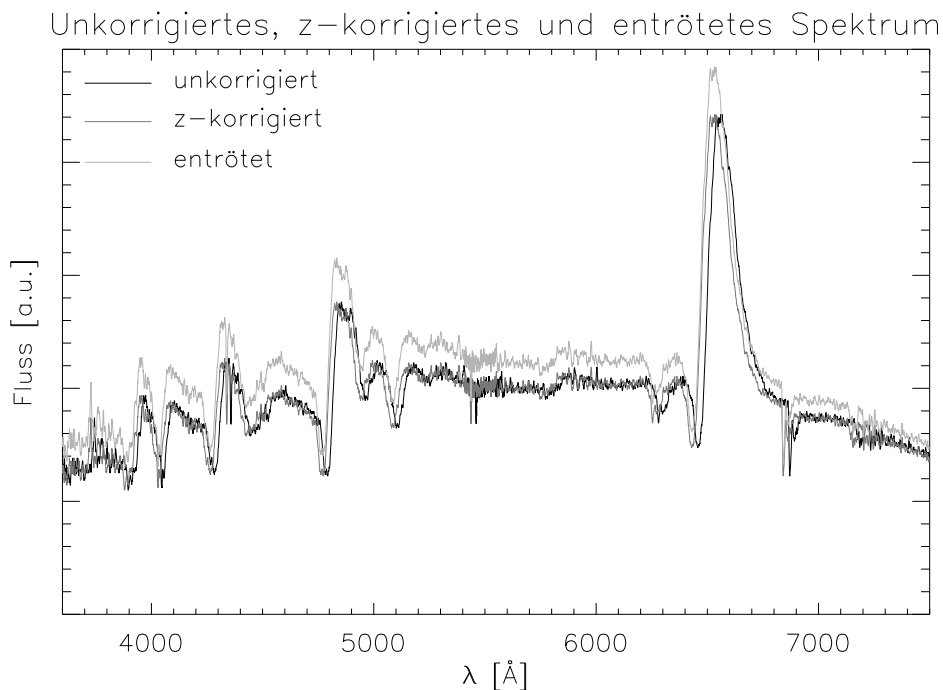
Wasserstoff besitzt nach den Modellvorstellungen die mit Abstand größte Häufigkeit und wegen des ausgedehnten optisch dünnen Teils der Supernova–Atmosphäre erwartet man Emissionslinien des Wasserstoffs.

<sup>1</sup>Da die  $H_\alpha$ -Linie so deutlich sichtbar ist, ist zu erwarten, dass die restliche Balmer–Serie des Wasserstoffs ebenfalls sichtbar ist. Bei  $\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$  und  $\lambda \approx 6500 \text{ \AA}$  sind auch Linien angedeutet, die  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  sein könnten. Der Nachweis, dass es sich tatsächlich um Teile der Balmer–Serie handelt, wird jedoch erst in Abschnitt 7.5 geführt.

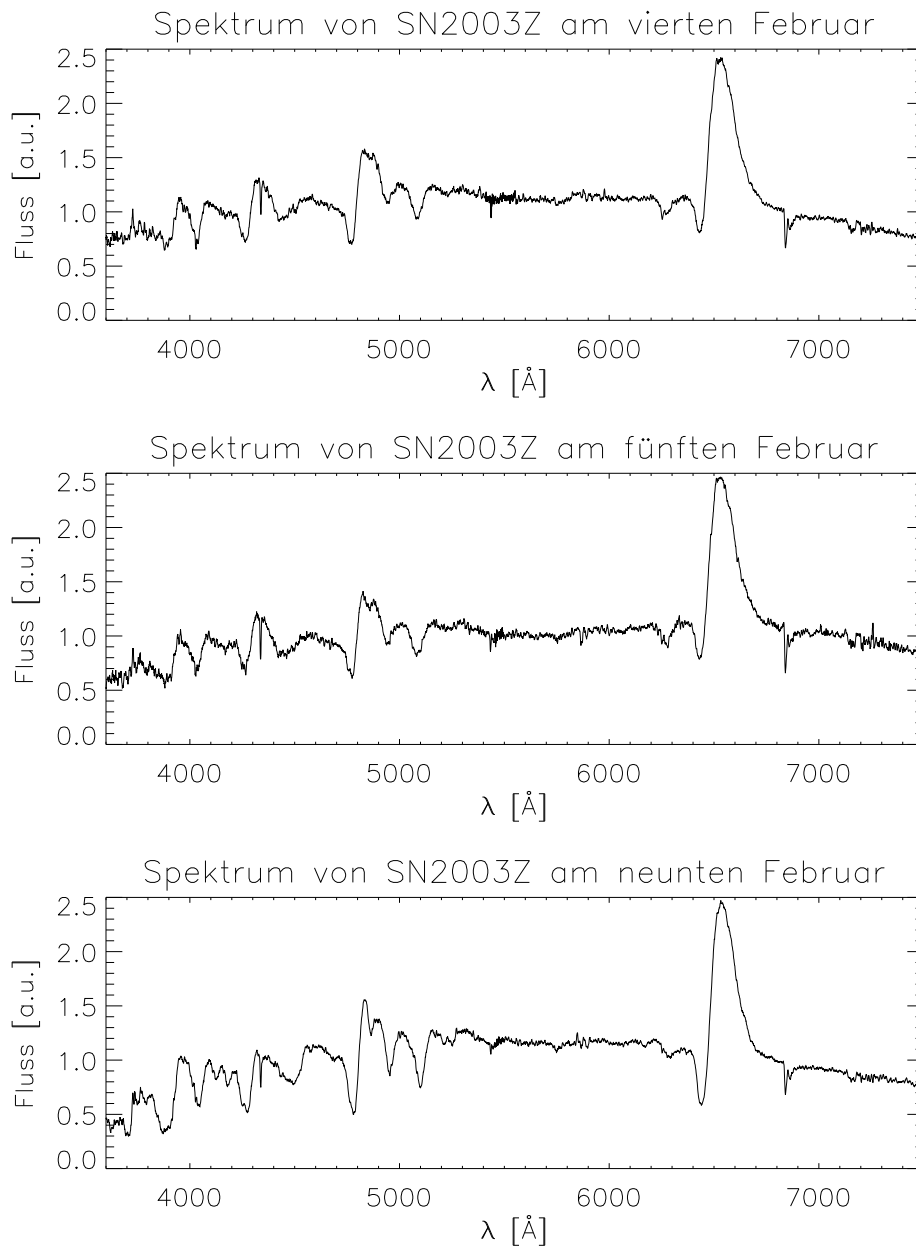
Prinzipiell ist eine Abschätzung der Effektivtemperatur durch eine Anpassung des Spektrums eines schwarzen Körpers an das Kontinuums möglich. Die Spektren erstrecken sich jedoch nur über einen Wellenlängenbereich von ungefähr 4000 Å. Die interstellare Absorption hat einen großen Einfluss auf den Anstieg des Kontinuums zu kleinen Wellenlängen hin. Eine derartige Temperaturabschätzung unterliegt somit nichtkalkulierbaren Fehlern.

Die im Fall von Sternen mögliche Analyse der Breite der Linien auf Druck- und Dopplerverbreiterungen ist wegen der Expansion der Hülle im Fall von Supernovae ebenfalls nicht möglich.

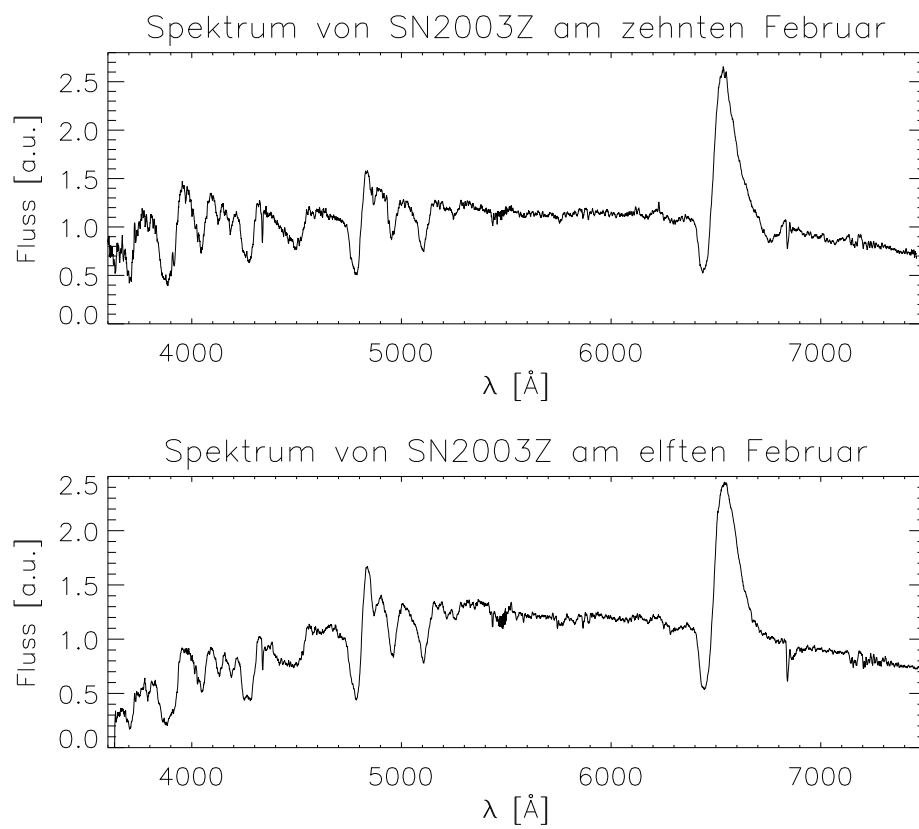
Für eine Modellierung in PHOENIX ist jedoch eine Vorgabe von einer Effektivtemperatur nötig. Da diese nicht ohne weiteres aus den Spektren zu ermitteln ist, muss durch eine Modellsreihe die Effektivtemperatur bestimmt werden (siehe Abschnitt 6.2).



**Abbildung 5.3:** Die Auswirkungen der Korrekturen für Rotverschiebung und interstellare Extinktion sind hier dem unkorrigierten Spektrum vom vierten Februar gegenüber gestellt. Das entrötete Spektrum ist ebenfalls für die Rotverschiebung korrigiert worden.



**Abbildung 5.4:** Die entröteten und für Wellenlängenverschiebung korrigierten Spektren der SN 2003Z vom vierten, fünften, neunten und elften Februar 2003. Die Einheiten des Flusses sind willkürlich gewählt.



**Abbildung 5.5:** Die entröteten und für Wellenlängenverschiebung korrigierten Spektren der SN 2003Z vom vierten, fünften, neunten und elften Februar 2003.  
Die Einheiten des Flusses sind willkürlich gewählt.

## 5.2 Die einzelnen Tage

Im folgenden Abschnitt werden die korrigierten Spektren der jeweils aufeinanderfolgenden Beobachtungstage miteinander verglichen. Die Spektren wurden hierzu nicht normiert, sondern werden in der willkürlichen Einheit des Flusses, die sich aus der Reduktion ergeben hat, dargestellt.

Die Serie der Spektren überdeckt eine Dauer von acht Tagen. Innerhalb dieser Zeit hat sich das Spektrum nicht in wesentlichen Punkten geändert. Dennoch sind Unterschiede zwischen den verschiedenen Tagen zu erkennen.

In den Abbildungen 5.6, 5.7 und 5.8 sind für aufeinanderfolgende Beobachtungstage jeweils zwei Spektren übereinander dargestellt. Unter den jeweiligen Spektren ist des Weiteren die Differenz der Flüsse aufgetragen.

Im oberen Teil der Abbildung 5.6 werden die Spektren vom vierten und fünften Februar verglichen.

Der Fluss im Kontinuum verschiebt sich zu größeren Wellenlängen, während sich die Form des Spektrums kaum ändert.

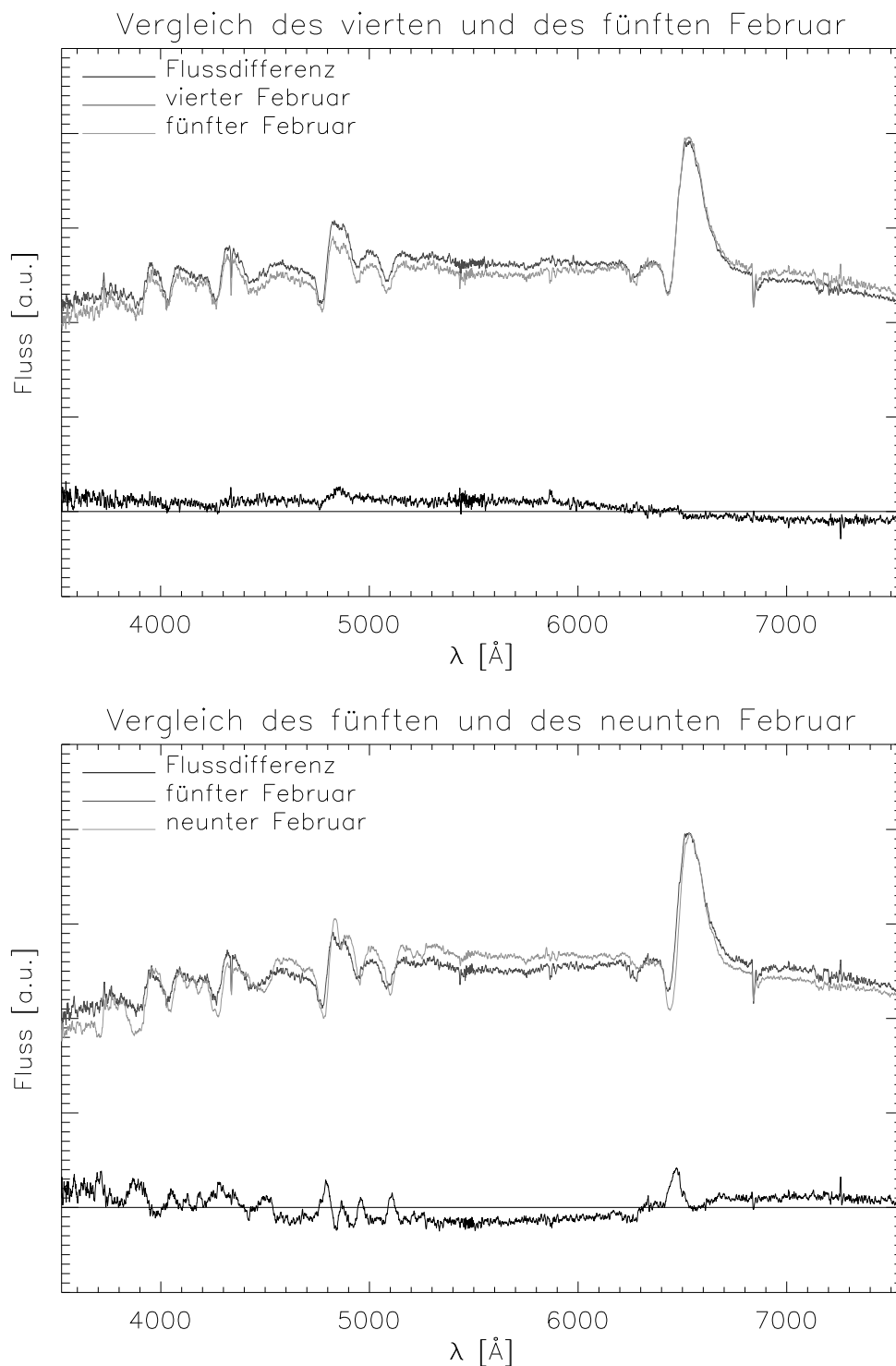
Zu Wellenlängen hin, die kleiner als die  $H_{\alpha}$ -Emissionslinie bei  $\approx 6500 \text{ \AA}$  sind, nimmt das Kontinuum ab, wohingegen bei längeren Wellenlängen das Kontinuum stärker wird. Die Differenz der Flüsse lässt sich grob durch eine Gerade annähern. Die Verschiebung des Flusses von dem blauen in den roten Bereich kann als Verringerung der Effektivtemperatur gedeutet werden, da sich das Maximum des Flusses von einer Hohlraumstrahlung mit sinkender Temperatur zu längeren Wellenlängen verschiebt. Diese Entwicklung entspricht daher der erwarteten Abkühlung der sich ausdehnenden Supernovahülle.

Das nächste Spektrum in der Serie ist vom neunten Februar. Der Vergleich mit dem fünften Februar ist im unteren Teil der Abbildung 5.6 dargestellt. Der Unterschied zwischen den Spektren ist größer als im oberen Teil der Abbildung 5.6.

Die auffälligste Veränderung ist die Verschiebung des Spektrums hin zu längeren Wellenlängen. In der Differenz der Flüsse erzeugt die Wellenlängenverschiebung in den Linien schnelle Anstiege und Abfälle. Doch auch die restliche Entwicklung des Spektrums weicht von der vom vierten zum fünften Februar beobachteten ab. Der Fluss im Kontinuum verlagert sich nicht mehr von kurzen zu langen Wellenlängen.

Im Bereich zwischen  $5200$  und  $6200 \text{ \AA}$  nimmt das Kontinuum zu, während bei Wellenlängen, die größer als  $6800 \text{ \AA}$  sind, das Kontinuum abnimmt.

Bei den kürzeren Wellenlängen unter  $5000 \text{ \AA}$  bleibt die Form des Spektrums nicht erhalten. Vorher nicht sichtbare Absorptionsmerkmale vertiefen sich (z.B. bei  $\approx 3700, 3900, 4100$  und  $4180 \text{ \AA}$ ) und die Verhältnisse der Stärke von Linienmerkmalen ändern sich (z.B. bei  $\approx 4800, 4950$  und  $6450 \text{ \AA}$ ).



**Abbildung 5.6:** (oben) Die Spektren vom vierten und fünften Februar sind übereinander dargestellt.  
(unten) Die Spektren vom fünften und neunten Februar sind übereinander dargestellt.

Der vierte Beobachtungstag, der zehnte Februar, liefert ein unerwartetes Bild, das im oberen Teil der Abbildung 5.7 dargestellt ist. Bis auf eine Erhöhung der  $H_{\alpha}$ -Emissionslinie und ein neues Absorptionsmerkmal bei  $6800 \text{ \AA}$  verändert sich das Spektrum von  $4700 \text{ \AA}$  an zu längeren Wellenlängen so gut wie nicht. Bei kürzeren Wellenlängen nimmt der Fluss im Blauen stark zu. Die Form der Linienmerkmale des Spektrums bleibt jedoch gleich, wobei die Zunahme des Flusses immer größer wird, je kleiner die Wellenlänge wird.

Dieses Verhalten physikalisch zu erklären, wird durch die Beobachtung am nächsten Tag erschwert. Die Spektren vom zehnten und elften Februar werden im unteren Teil der Abbildung 5.7 dargestellt. Das Spektrum vom elften Februar zeigt einen gegenüber dem Vortag stark reduzierten Fluss im Blauen und auch das Absorptionsmerkmal bei  $6800 \text{ \AA}$  ist mitsamt der Erhöhung der  $H_{\alpha}$ -Emissionslinie verschwunden.

Eine physikalische Ursache, die innerhalb eines Tages auftaucht und wieder, ohne die Entwicklung des Spektrums zu beeinflussen, innerhalb eines Tages verschwindet, ist auszuschließen.

Die Spektren wurden von Prof. Dr. Stefan Dreizler reduziert; seiner Meinung nach ist die durch eine Änderung der Beobachtungsverhältnisse zwischen den Aufnahmen der Supernova und eines Referenzsterns verfälschte Reduktion der Daten für die Eigenheiten des Spektrums verantwortlich. Eine Korrektur der Daten ist nicht mehr möglich, so dass das Spektrum vom zehnten Februar zur weiteren Analyse ausscheidet.

Nach dem Aussortieren des Spektrums vom zehnten Februar folgen die Beobachtungen vom neunten und elften Februar unmittelbar aufeinander.

Die Entwicklung des Spektrums in diesem Zeitraum ist im oberen Teil der Abbildung 5.8 dargestellt. Zwischen den beiden Spektren beobachtet man eine leichte weitere Wellenlängenverschiebung zu längeren Wellenlängen hin. Das Kontinuum ändert sich dagegen sehr wenig, während einige Linienmerkmale sich weiter verstärken (z.B. bei  $\approx 4120, 4180, 4250$  und  $4820 \text{ \AA}$ ).

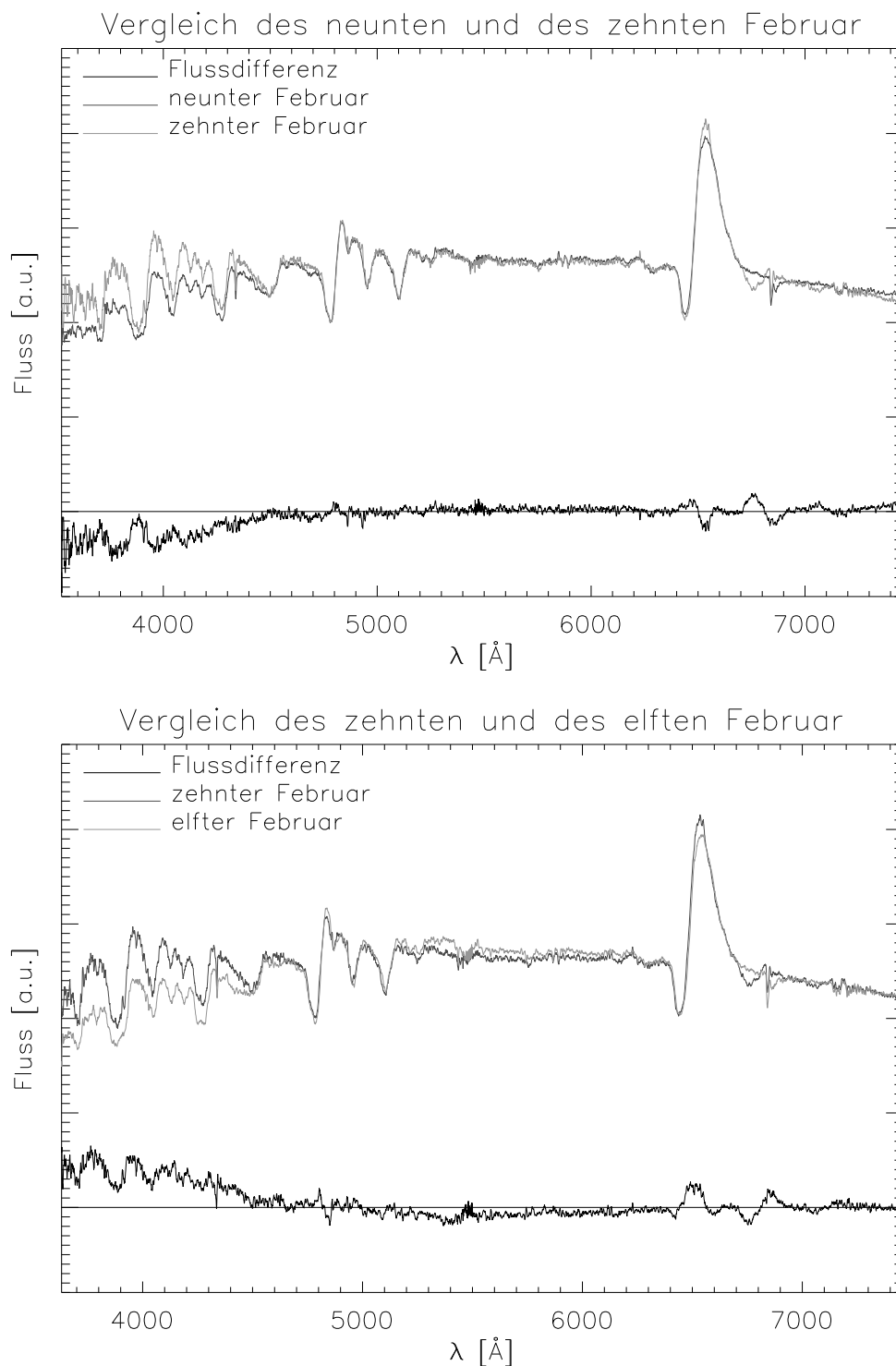
Die zeitliche Entwicklung des Spektrums über den beobachteten Zeitraum wird besonders deutlich, wenn die Beobachtungen des ersten und des letzten Tages der Beobachtungsreihe gegenübergestellt werden.

Im unteren Teil der Abbildung 5.8 sind die Spektren vom vierten und vom elften Februar übereinander dargestellt.

Das Spektrum hat sich zu längeren Wellenlängen verschoben und die Form von einigen Merkmalen hat sich ebenfalls geändert. Im Bereich von  $4000$  bis  $4500 \text{ \AA}$  ist erkennbar, dass sich nicht nur neue Absorptionsmerkmale bilden, sondern dass auch bereits vorhandene Merkmale ihre Form deutlich ändern. Eine deutliche Formänderung ist ebenfalls bei  $\approx 4850 \text{ \AA}$  sichtbar. Ist am vierten Februar eine »Doppelspitze« nur angedeutet zu erkennen, so ist am elften Februar die kurzwelligere Komponente sehr viel stärker ausgeprägt und die zwei Komponenten sind deutlicher zu erkennen.

Im Bereich von  $4700$  bis  $5200 \text{ \AA}$  ist die Verschiebung der Wellenlänge deutlich erkennbar. Die Absorptionslinien sind zu längeren Wellenlängen verschoben und haben sich vertieft. Bei der  $H_{\alpha}$ -Linie zeigt sich die Wellenlängenverschiebung ebenfalls sehr deutlich. Der Absorptionsteil der Linie hat sich vertieft, während der Emissionsteil sich kaum geändert hat.





**Abbildung 5.7:** (oben) Die Spektren vom neunten und zehnten Februar sind übereinander dargestellt.  
(unten) Die Spektren vom zehnten und elften Februar sind übereinander dargestellt.

Aus der Differenz der beiden Flüsse ist ersichtlich, dass der Fluss des Kontinuums bei Wellenlängen, die kleiner als  $5200 \text{ \AA}$  oder größer als  $7000 \text{ \AA}$  sind, abgenommen hat. Der Fluss des Kontinuums zwischen  $5200$  und  $6200 \text{ \AA}$  ist hingegen angestiegen.

Die Interpretation der zwischen den ersten beiden Tagen beobachteten Entwicklung des Kontinuums als Abkühlung der Atmosphäre kann daher nicht auf die weiteren Tage übertragen werden. Am neunten Februar kehrt sich die Entwicklung des Kontinuums ab  $5200 \text{ \AA}$  sogar um. Die Entwicklung der Struktur der Supernova überdeckt den erwarteten Einfluss der Abkühlung auf das Spektrum. Dieses hängt daher in vergleichbarer Stärke von den strukturellen Eigenschaften und der Effektivtemperatur der Atmosphäre ab.

Eine Verschiebung des Spektrums zu längeren Wellenlängen könnte dadurch verursacht werden, dass die Hülle der Supernova abgebremst wird. Dies würde durch ein Auftreffen der Hülle auf eine Gaswolke bewerkstelligt werden. Bei einer solchen Abbremsung würde jedoch die kinetische Energie der Hülle auf das Gas übertragen und in der Gaswolke würden sich Schockwellen ausbilden. Die dadurch entstehende Aufheizung würde im Spektrum deutlich sichtbar werden. Vom fünften auf den neunten Februar wurde eine deutliche Veränderung des Spektrums jedoch nicht beobachtet, obwohl sich die Wellenlänge verschoben hat. Eine Abbremsung der Hülle scheidet daher aus.

Stattdessen liegt die Verschiebung an der dreidimensionalen Ausdehnung der Supernova. Das Volumen eines Raumelements in Kugelkoordinaten wächst quadratisch mit der Entfernung zum Koordinatenursprung. Die Dichte in dem Raumelement nimmt daher ab, wenn es sich vom Zentrum entfernt. Dies bedeutet, dass die optische Tiefe der äußeren Schichten der Hülle schnell abnimmt. Dadurch wird das Spektrum von tieferliegenden und langsameren Schichten aufgenommen. Die geringere Geschwindigkeit vermindert dabei die Blauverschiebung des Spektrums.

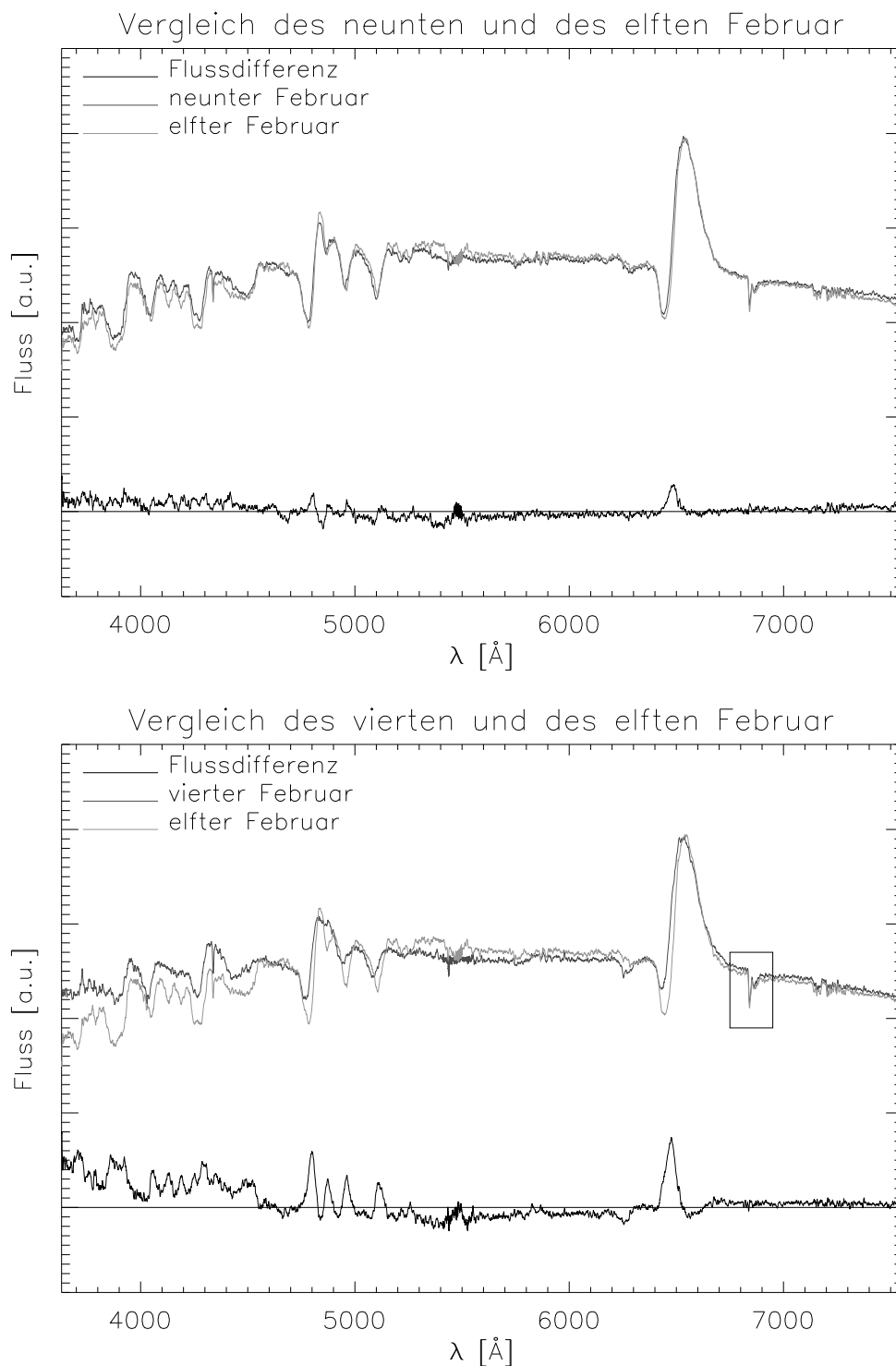
Zwischen  $6800$  und  $7000 \text{ \AA}$  befindet sich ein bisher nicht beschriebenes stark ausgeprägtes Absorptionsmerkmal. Dieses ist in allen beobachteten Spektren vorhanden.

Im unteren Teil der Abbildung 5.8 ist dieses Merkmal mit einem Rechteck markiert. Es ist offensichtlich, dass sich die Absorptionswellenlänge nicht wie der Rest des Spektrums mit der Zeit verschoben hat.

Dies bedeutet, dass das unverschobene Absorptionsmerkmal nur in optisch dicken Schichten entstanden sein kann, die sich gegenüber dem Detektor immer mit derselben Relativgeschwindigkeit bewegt haben.

Da die Supernova-Atmosphäre entsprechend der obigen Argumentation als Ursache ausgeschlossen werden kann, bleibt als mögliche Ursache die gegenüber dem Detektor ruhende Erdatmosphäre. Die Absorptionslinie befindet sich bei  $6871 \text{ \AA}$ <sup>2</sup>. Bei  $6867 \text{ \AA}$  befindet sich das Absorptionsband von  $\text{O}_2 \text{ B}$ . Da keine alternativen Molekülbänder im Wellenlängenbereich existieren, wird das Absorptionsmerkmal mit  $\text{O}_2 \text{ B}$  identifiziert und wegen der Nichtzugehörigkeit zu der Supernova in den weiteren Betrachtungen ignoriert. Aus der beobachteten Absorptionswellenlänge des  $\text{O}_2 \text{ B}$  folgt, dass die Wellenlängenkalibration einen Fehler von ca. vier  $\text{ \AA}$  besitzt.

<sup>2</sup>Bei der Bestimmung dieser Wellenlänge muss das nicht für die Rotverschiebung korrigierte Spektrum verwendet werden.



**Abbildung 5.8:** (oben) Die Spektren vom neunten und elften Februar sind übereinander dargestellt.  
(unten) Die Beobachtungen vom vierten und elften Februar sind übereinander dargestellt. Im Rechteck ist ein Absorptionsmerkmal markiert, das sich nicht in der Wellenlänge verschoben hat.

## Kapitel 6

# Modellierung der SN 2003Z mit PHOENIX

Die zeitliche Entwicklung der Spektren zeigt, dass die Veränderungen in der Struktur der Atmosphäre, wie z.B. eine abnehmende Temperatur oder eine Verringerung der Geschwindigkeit der Spektren erzeugenden Schichten, einen großen Einfluss auf das Spektrum haben. So haben sich z.B. die Form und die Stärke einzelner Spektrallinien und der Verlauf des Kontinuums geändert.

Die Wahl der physikalischen Parameter, die die Struktur der Atmosphäre bestimmen, muss daher wegen ihres anscheinend großen Einflusses auf das Spektrum sorgfältig gewählt werden.

Bei den wichtigsten Parametern handelt es sich um die Effektivtemperatur, den Dichteexponenten (siehe (4.1)) und das Geschwindigkeitsprofil der Supernovahülle (siehe (4.3)). Weiterhin ist das radioaktive Alter der Supernova für die radioaktiven Prozesse ein wichtiger Parameter. Das radioaktive Alter gibt die Dauer an, über welchen Zeitraum hinweg die radioaktiven Prozesse bereits abgelaufen sind.

Die Elementhäufigkeiten haben einen großen Einfluss auf die Opazität und daher ebenfalls auf das Spektrum. Die Häufigkeiten sind jedoch unbekannt, so dass zunächst solare Werte angenommen werden.

Idealerweise müssten all diese Parameter systematisch in den Modellrechnungen variiert werden und somit ein Raster an Supernovamodellen erstellt werden, das alle physikalischen Kombinationen der Werte abdeckt. Die Rechnungen von Supernovamodellen benötigen jedoch eine beachtliche Rechenzeit, die umso größer wird, je mehr Ionisationsstufen von Elementen im NLTE betrachtet werden.

Wegen der großen Zahl der freien Parameter verbietet es sich aus Rechenzeitgründen, ein solches Raster an Supernovamodellen zu erstellen. Stattdessen müssen die einzelnen Parameter nach physikalischen Überlegungen gezielt gewählt und durch Vergleiche von verschiedenen Modellspektren mit den Beobachtungen weiter eingeschränkt werden.

Im Folgenden werden Abschätzungen für die Effektivtemperatur und die Geschwindigkeit der Atmosphäre gemacht. Dabei wird im Weiteren für das Dichtegesetz als typischer Exponent ein Wert von  $n = 11$  angenommen. Das radioaktive Alter der Supernova kann grob aus

dem Datum der Entdeckung und dem Zeitraum bis zur Beobachtung abgeschätzt werden. Das erste Spektrum wurde sieben Tage nach der Entdeckung der Supernova am 29. Januar aufgenommen. Unter der Annahme, dass nach fünf Tagen die Helligkeit der Supernova groß genug war, um sie zu entdecken, wird das Alter der Supernova zu zwölf Tagen angenommen.<sup>1</sup>

Als Ausgangsmodell für die Modellierungen wurde ein Modell von E. Baron verwendet. Das Modell hat eine Effektivtemperatur von 5200 K, eine charakteristische Geschwindigkeit (siehe (4.3)) von 3700 km/s, einen Dichteexponenten (siehe (4.1)) von  $n = 11$  und betrachtet bereits H I, He I und Ne I bei einem radioaktiven Alter von 30 Tagen im NLTE.

Alle berechneten Modelle verfügen über 100 Schichten und jedes Modell wurde mit 20 Iterationen berechnet, da hiernach alle verwendeten Modelle nach den in Abschnitt 6.1 angegebenen Kriterien konvergiert waren.

Im Weiteren wurde nicht versucht, alle beobachteten Tage gleichzeitig zu modellieren, sondern es wurde vorerst lediglich der vierte Februar modelliert.

Die folgenden Tage können im Anschluss von einem passenden, physikalisch selbstkonsistenten Modell des ersten Beobachtungstages durch entsprechende Veränderung der physikalischen Parameter gemäß der erwarteten Entwicklung, wie Abkühlung der Atmosphäre und Verlangsamung der Spektren erzeugenden Schichten, modelliert werden.

## 6.1 Die Konvergenz von Modellen

Eine notwendige Bedingung für die Selbstkonsistenz eines Modells ist, dass es sich von Iteration zu Iteration nur sehr wenig ändert. Dies bedeutet insbesondere, dass die Temperatur und die Besetzungszahlen sich nicht stark ändern dürfen. Die Erfüllung der obigen Bedingung stellt noch keine hinreichende Bedingung dafür dar, dass das Modell physikalisch richtig ist. Für die Behandlung des Strahlungstransports in bewegten Medien ist die Annahme des radiativen Gleichgewichts eine fundamentale Bedingung.

Radiatives Gleichgewicht bedingt Energieerhaltung. Im Lagrangesystem muss daher Energieerhaltung erfüllt sein, damit das Modell physikalisch richtig ist.

Neben der Konvergenz der Temperatur und der Besetzungszahlen muss daher auch die Erfüllung der Energieerhaltung gegeben sein, um eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Modells zu erhalten.

Die Energieerhaltung wird auf zwei verschiedenen Wegen geprüft. Die beiden Bedingungen:

$$\left( \int H_{\lambda} d\lambda \right) - L(\tau) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.1)$$

$$\int \chi_{\lambda} (S_{\lambda} - J_{\lambda}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.2)$$

müssen erfüllt sein. Die Kriterien sind nicht in allen Bereichen der Atmosphäre gleich gut anwendbar. Die Anwendbarkeitsbereiche beider Methoden decken jedoch die gesamte Atmosphäre ab.

<sup>1</sup>In Abschnitt 7.3 wird gezeigt, dass die genaue Wahl des Alters keinen entscheidenden Einfluss auf das Spektrum hat, wobei es jedoch nicht unter fünf oder mehr als 40 Tage betragen sollte.

Prinzipiell hängt die erste Methode von der Differenz aus zwei aus  $I_\lambda(r, \mu)$  gebildeten Größen ab. Dabei wird der Betrag der mit  $\mu$  gewichteten und über negative  $\mu$ s integrierten Intensität von der über positive  $\mu$ s integrierten gewichteten Intensität abgezogen. In äußeren Schichten ist diese Differenz problematisch, da die einfallenden Intensitäten gegenüber den ausgehenden Intensitäten sehr klein sind.

Die zweite Methode hängt von der mittleren Intensität  $J_\lambda$  ab. In den inneren Schichten nimmt  $J_\lambda$  große Werte an. Dies ist problematisch, da die Differenz mit einer Zahl gleicher Größenordnung null ergeben muss, kleine Differenzen großer Zahlen aber leicht sehr viel größer als null sein können.

Als weitere Kriterien dafür, dass die Ergebnisse physikalisch richtig sind, werden sich stetig ändernde physikalische Größen wie z.B. der Druck auf ihre Stetigkeit untersucht.

Die Ergebnisse der Modellierung sind in Kapitel 7 zusammengefasst.

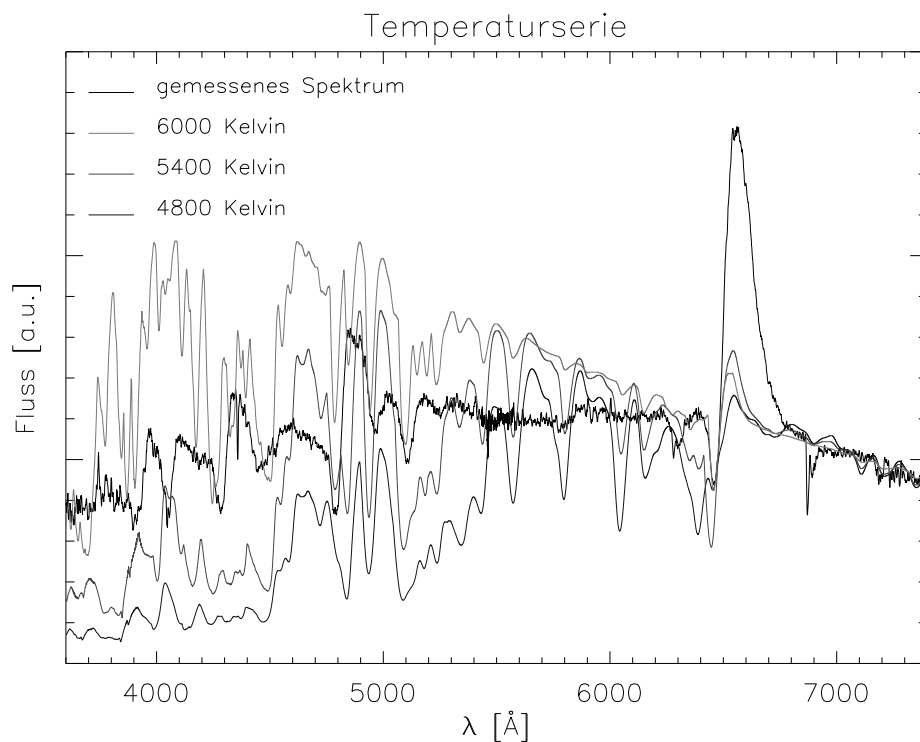
## 6.2 Abschätzung der Effektivtemperatur

Die Effektivtemperatur der Atmosphäre ist ein sehr wichtiger physikalischer Parameter der Atmosphäre. Sie bestimmt die Eigenschaften des Spektrums grundlegend. Aus diesem Grund kann die Effektivtemperatur durch eine Modellsreihe abgeschätzt werden. Für ein vorgegebenes Geschwindigkeitsprofil der Hülle wird eine Serie von Modellen mit verschiedenen Effektivtemperaturen gerechnet. Der Verlauf der dazugehörigen Spektren ermöglicht eine Abschätzung der Effektivtemperatur, da Spektren von Modellen mit einer deutlich abweichenden Effektivtemperatur sehr stark von den gemessenen Spektren abweichen.

In Abbildung 6.1 ist ein Ausschnitt aus einer Effektivtemperaturserie dargestellt. Die verwendeten Modelle behandeln Fe I bis Fe IV sowie H I im NLTE. Dies geschieht, da diese Elemente einen wichtigen Einfluss auf das Spektrum haben. Die Geschwindigkeit in allen Modellen beträgt 4000 km/s.

Der Übersichtlichkeit wegen sind nur drei verschiedene Effektivtemperaturen dargestellt. Die Spektren sind so normiert, dass der langwellige Teil des Spektrums jenseits der  $H_\alpha$ -Linie möglichst gut übereinstimmt. Dieser Teil des Spektrums hängt viel weniger stark von der Effektivtemperatur ab als der blaue Teil des Spektrums, weswegen die Spektren in diesem Wellenlängenbereich am besten vergleichbar und somit auch normierbar sind.

Die Spektren von anderen Temperaturen verlaufen grob zwischen den Spektren der nächsthöheren und nächstniedrigeren Temperaturen. Die Bestimmung der am besten geeigneten Effektivtemperatur erfolgt recht willkürlich. Jedoch ist der Fluss im Blauen für 4800 K zu gering, während er bei 6000 K zu groß ist. Die Effektivtemperatur von 5400 K liegt genau dazwischen, so dass die 5400 K als Ausgangstemperatur verwendet werden.



**Abbildung 6.1:** Eine Auswahl von drei Modellspektren mit den Effektivtemperaturen 4800K, 5400K und 6000K. Die Spektren sind auf den langwelligen Teil des Spektrums normiert. Als mögliche Effektivtemperatur werden 5400 K angenommen.

### 6.3 Abschätzung der Geschwindigkeit

Das Geschwindigkeitsprofil der Hülle kann man grob aus den beobachteten Wellenlängenverschiebungen abschätzen. Für die Abschätzung eines Startwertes ist folgende Vorgehensweise jedoch hinreichend genau.

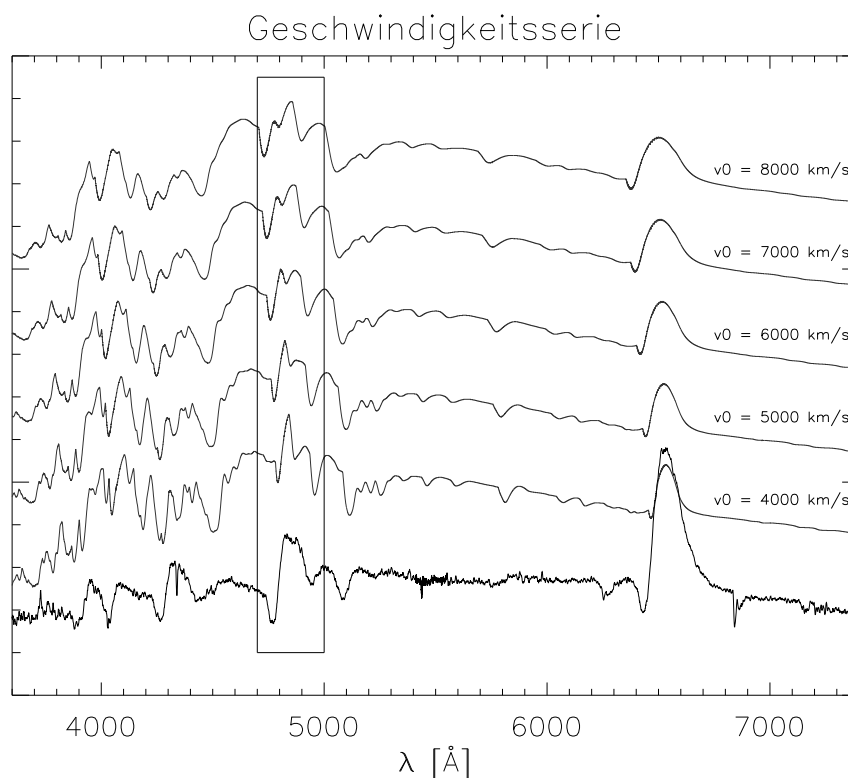
Die Galaxie, der die Supernova zugeordnet wird, war zum Zeitpunkt der Spektrenaufnahme um  $z = 0.00437$  gegenüber der Erde rotverschoben. Die beobachtete  $H_{\alpha}$ -Linie ist jedoch gegenüber ihrem Literaturwert nicht rot- sondern blauverschoben. Die Verschiebung gegenüber dem Literaturwert von  $\lambda_{H_{\alpha}} = 6563 \text{ \AA}$  beträgt ca.  $60 \text{ \AA}$ .<sup>2</sup>

Die Geschwindigkeit, die die Rotverschiebung verursacht, beträgt ca. 1310 km/s, während die Blauverschiebung der  $H_{\alpha}$ -Linie eine Geschwindigkeit von ca. -2740 km/s bedeutet. Daraus folgt, dass die Summe aus der Expansion der Hülle und der Eigenbewegung der Supernova an sich eine Geschwindigkeit von ca. -4050 km/s ergeben muss. Unter der Annahme,

<sup>2</sup>Die Unsicherheit der Wellenlängenkalibration von  $\approx 4 \text{ \AA}$  (siehe Abschnitt 5.2) wird in dieser Abschätzung ignoriert.

dass die Supernova keine Eigenbewegung besitzt, folgt hieraus ein Startwert für den Geschwindigkeitsparameter  $v_0$  des Supernovamodells.

Von diesem Startwert aus wurde eine Serie von Modellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten gerechnet. Eine Serie mit einer Effektivtemperatur von  $T_{\text{eff}} = 5400\text{K}$  im Geschwindigkeitsbereich  $v_0 = 4000$  bis  $8000$  km/s ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Für eine bessere Übersichtlichkeit wurden die verschiedenen Spektren übereinander abgebildet, wobei jedoch alle Spektren auf dieselbe willkürliche Einheit des Flusses normiert wurden.



**Abbildung 6.2:** Es ist eine Modellsreihe dargestellt, in der die charakteristische Geschwindigkeit der Hülle variiert wird. Das Rechteck markiert einen Wellenlängenbereich, in dem das Spektrum eine starke Geschwindigkeitsabhängigkeit zeigt. Der Übersichtlichkeit wegen wurden die Spektren übereinander dargestellt. Die Darstellung des Flusses ist daher willkürlich.

Die  $H_\alpha$ -Linie zeigt ein P-Cygni-Profil. Nach [Petschek, 1990] zeigen SN II-P ein solches Profil. Nach [Young und Branch, 1989] entsteht ein Plateau bei hohen Hüllengeschwindigkeiten. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Expansionsgeschwindigkeit der Supernova nicht geringer als die geschätzten  $4050$  km/s ist.

Es sind die Geschwindigkeiten  $v_0 = 4000, 5000, 6000, 7000$  und  $8000$  km/s dargestellt. Man sieht deutlich, dass die Geschwindigkeit nicht nur einen Einfluss auf die Verschiebung der



Wellenlänge hat, sondern auch die Form des Spektrums entscheidend beeinflusst. So verändert das Spektrum im Bereich von 4700 bis 5000 Å seinen Charakter bei Veränderung der Geschwindigkeit sehr stark. Dieser Bereich wurde in Abbildung 6.2 mit einem Rechteck markiert.

Bei niedrigeren Geschwindigkeiten ist bei der »Doppelspitze« die kurzwelligere Komponente sehr dominant. Bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit gleichen die beiden Spitzen sich immer mehr an, bis bei sehr hohen Geschwindigkeiten ab  $\approx 7000$  km/s die langwelligere Komponente stärker ausgeprägt ist.

Bei höheren Geschwindigkeiten verbreitern sich ebenfalls die Spektrallinien. Die optimale Geschwindigkeit, um die Breite der  $H_\alpha$ -Linie zu erreichen, liegt bei ca. 6000 km/s. Die Beschreibung der beobachteten Breite der  $H_\alpha$ -Linie ist jedoch kein ideales Kriterium, um eine neue Abschätzung für die Expansionsgeschwindigkeit zu gewinnen, da viele verschiedene Schichten zum P-Cygni-Profil beitragen und die Breite des Emissionsprofils die charakteristische Geschwindigkeit eventuell überschätzt.

## 6.4 Die Wahl der Ionisationsstufen

Einer der großen Vorzüge von PHOENIX ist die Möglichkeit, Ionisationsstufen von Elementen konsistent im NLTE zu behandeln. Diese Behandlung ist jedoch sehr rechenintensiv, da für jedes Ion Ratengleichungen (siehe Abschnitt 3.5) gelöst werden. Um Rechenzeit zu sparen, erfolgt daher eine Auswahl an Ionen, die im NLTE betrachtet werden.

Es werden solare Häufigkeiten der Elemente angenommen. Die Häufigkeiten der schweren Elemente sind gegenüber der von Wasserstoff sehr klein, jedoch ist die Häufigkeit eines Elements allein kein geeignetes Kriterium, um darüber zu entscheiden, ob die Betrachtung im NLTE notwendig ist oder nicht.

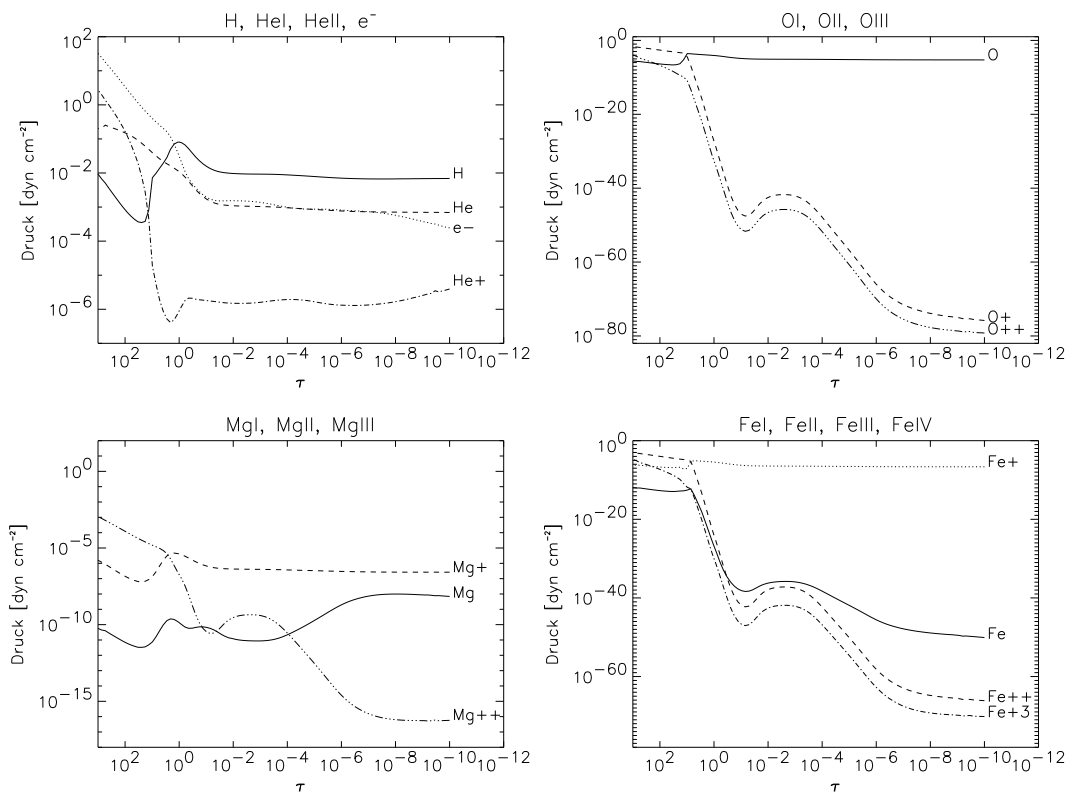
Die Auswahl der Elemente richtet sich nach ihrer Relevanz für das Spektrum. Die Relevanz wird durch die Opazität des Ions beschrieben. Die Opazität ist die Summe aus Produkten von Häufigkeiten und Wirkungsquerschnitten. Ein Ion mit einer geringen Häufigkeit wie z.B. Eisen kann daher dennoch relevant sein, wenn der Wirkungsquerschnitt entsprechend groß ist. Umgekehrt gilt dies genauso, so dass ein geringer Wirkungsquerschnitt wie im Fall von Wasserstoff durch eine große Häufigkeit kompensiert werden kann.

Im Folgenden wurde angenommen, dass Elemente nur bis sechs Größenordnungen unter der Häufigkeit von Wasserstoff liegen dürfen, um im NLTE betrachtet zu werden.

Mittels dieses Kriteriums wurde nur eine Auswahl bezüglich des Elements getroffen. Welche Ionisationsstufen berücksichtigt werden müssen, wird durch einen Vergleich der Partialdrücke entschieden. Dabei ist entscheidend, wie groß der Partialdruck des jeweiligen Ionisationsstufe gegenüber dem des dominierenden Ions ist und ob durch Über- und Unterionisation relevante Ionen beeinflusst werden können.

Die Partialdrücke der verschiedenen Ionisationsstufen hängen von der Effektivtemperatur der Atmosphäre ab. Die zur Abschätzung verwendeten Partialdrücke stammen von einem Modell mit einer Effektivtemperatur von 5600 K.

In Abbildung 6.3 sind einige charakteristische Partialdruckverläufe dargestellt. Es werden Partialdrücke von Wasserstoff, Helium, Magnesium, Sauerstoff und Eisen betrachtet. Die Beurteilungen über die Relevanz von Ionisationsstufen bei diesen Elementen dienen als Musterbeispiele für Elemente mit ähnlichen Partialdruckverläufen. Ist wie im Beispiel von Helium eine Ionisationsstufe dominant über alle anderen, so wird nur die stärkste Ionisationsstufe berücksichtigt.



**Abbildung 6.3:** Es sind einige charakteristische Beispiele von Partialdruckverläufen von Wasserstoff, Helium, Sauerstoff, Magnesium und Eisen dargestellt.

Wegen des Temperaturgradienten innerhalb der Atmosphäre kann sich die dominierende Ionisationsstufe ändern. So ist zum Beispiel der Druck von O II in den inneren Schichten größer als der von O I, wird dann jedoch kleiner und wird gegenüber O I bedeutungslos. Wegen der durch das NLTE verursachten Über- und Unterionisation werden dennoch O I und O II im NLTE betrachtet. O III ist unwichtig, da dessen Druck gegenüber dem jeweils dominierenden Ion verschwindend gering ist.

Im Beispiel von Magnesium werden drei Ionisationsstufen im NLTE berücksichtigt. Entweder sind sie über Teile der Atmosphäre das dominierende Ion, oder sie sind gegenüber dem dominierenden Ion nicht zu vernachlässigen.

In großen Vielelektronensystemen werden noch mehr Ionisationsstufen berücksichtigt, damit der Einfluss des NLTE die Besetzungszahlen korrekt beschreibt. Im Fall von Eisen sind die ersten vier Ionisationsstufen relevant.

Die Elemente und Ionisationsstufen, die für die vollständige Beschreibung einer Supernova-Atmosphäre, die eine mit 5600 K vergleichbare Effektivtemperatur besitzt, nötig sind, sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Z	Ionen	Zahl der Niveaus	Z	Ionen	Zahl der Niveaus
1	H I	30	14	Si I, Si II, Si III	329, 93, 155
2	He I	19	15	P I, P II	229, 89
6	C I, C II	228, 85	16	S I, S II	146, 84
7	N I, N II	252, 152	19	K I, K II	73, 22
8	O I, O II	36, 171	20	Ca I, Ca II, Ca III	194, 87, 150
10	Ne I	26	25	Mn I, Mn II	316, 546
11	Na I, Na II	53, 35	26	Fe I, Fe II, Fe III, Fe IV	494, 617, 566, 203
12	Mg I, Mg II, Mg III	273, 72, 91	28	Ni I, Ni II, Ni III, Ni IV	153, 429, 259, 189
13	Al I, Al II	111, 188			

**Tabelle 6.1:** In dieser Tabelle sind die Elemente mit ihrer Kernladungszahl Z und den verschiedenen Ionen mitsamt der Anzahl der im NLTE betrachteten Energieniveaus aufgeführt.

Wird ein Element im NLTE behandelt, so ergeben sich durch das Lösen der Ratengleichungen andere Besetzungszahlen, die einen Einfluss auf die Opazität und somit auch auf den Fluss haben. Dies bewirkt in der Temperaturkorrektur eine Änderung der Temperaturstruktur. Werden nun mehrere Elemente gleichzeitig neu im NLTE behandelt, so kann der Einfluss auf den Fluss so groß sein, dass die Temperaturkorrektur versagt oder die Iteration des Strahlungsfeldes an sich gar nicht möglich ist.

Daher müssen die Elemente nach und nach in das NLTE übernommen werden. Die Reihenfolge ist dabei zunächst beliebig, doch es zeigt sich, dass es ratsam ist, Elemente mit großer Wirkung frühzeitig in das NLTE zu übernehmen, da sich die Temperaturstruktur in diesen Fällen rascher den idealen Werten annähert.

Eisen ist eine wichtige Opazitätsquelle. In Rechnungen, in denen Eisen erst nach den Elementen mit einer Kernladungszahl kleiner als zehn eingebunden wurde, traten Schwierigkeiten sowohl in der Lösung der Strahlungstransportgleichung als auch in der Temperaturkorrektur auf. Diese Probleme konnten umgangen werden, indem Eisen als erstes Element in das NLTE übernommen wurde. Ein Nachteil ist dabei, dass Eisen über sehr viele Übergänge verfügt. Dadurch dauert die Lösung der Ratengleichungen vergleichsweise lange, so dass die Modellrechnungen viel Zeit benötigen.

Die verschiedenen Ionen eines Elementes sollten nicht einzeln nacheinander im NLTE behandelt werden. Denn wird z.B. eine Ionisationsstufe durch den Einfluss des Strahlungsfeldes überionisiert, wird die nächsthöhere Ionisationsstufe stärker besetzt. Damit dies konsistent mit der Wirkung des NLTE auf die höhere Ionisationsstufe ist, müssen alle berücksichtigten Ionisationsstufen eines Elementes gleichzeitig in das NLTE übernommen werden.

## 6.5 Der Einfluss von Radioaktivität

Die radioaktiven Prozesse der durch den Supernova-Ausbruch erzeugten instabilen Isotope haben einen großen Einfluss auf die Lichtkurven [Young und Branch, 1989] und somit auch auf die Spektren von Supernovae.

Die durch die Zerfallsprozesse freiwerdende und im Gas deponierte Energie beeinflusst die Ratengleichungen. Da die Energie nicht ursächlich thermischen Ursprungs ist, nennt man die durch radioaktiven Zerfall hervorgerufenen Raten nichtthermische Raten.

Nach den Gleichungen (2.1) und (2.2) entstehen sowohl  $\gamma$ -Strahlung als auch nichtthermische Elektronen. Der Anteil der hochenergetischen Elektronen nimmt insbesondere aufgrund der Comptonstreuung der  $\gamma$ -Strahlung zu. Der Einfluss der Elektronen auf die Besetzungszahlen ist deutlich größer als der der Strahlung, weswegen nur die Wirkung der Elektronen berücksichtigt wird. In den Ratengleichungen wird dabei jedoch nur die Rate  $C_{1\kappa}$  betrachtet. Dies bedeutet, dass nur kollisionsbedingte Ionisation des Grundzustands betrachtet wird.

Wie groß der Einfluss der nichtthermischen Prozesse ist, zeigt sich, wenn die anderen Raten in den Ratengleichungen so festgelegt werden, dass sich ohne Radioaktivität keine Abweichung vom LTE zeigen würde. Dies wird erreicht, indem die radiativen Raten zu null gesetzt werden. So verbleiben nur die Stoßraten. Wegen der verschwundenen Strahlungsraten verschwindet der Einfluss des Strahlungsfeldes, und die Bedingungen für das LTE sind ideal erfüllt.

Die Abweichungskoeffizienten  $b_i$ , die die Abweichung vom LTE beschreiben, sind bei Vernachlässigung von nichtthermischen und Strahlungsraten identisch eins. Wie groß der Einfluss der nichtthermischen Raten auf die Ratengleichung ist, zeigt sich in den Abweichungskoeffizienten unter Berücksichtigung eben dieser Raten. Ist der Einfluss groß, so werden die  $b_i$ -Koeffizienten deutlich von eins abweichen.

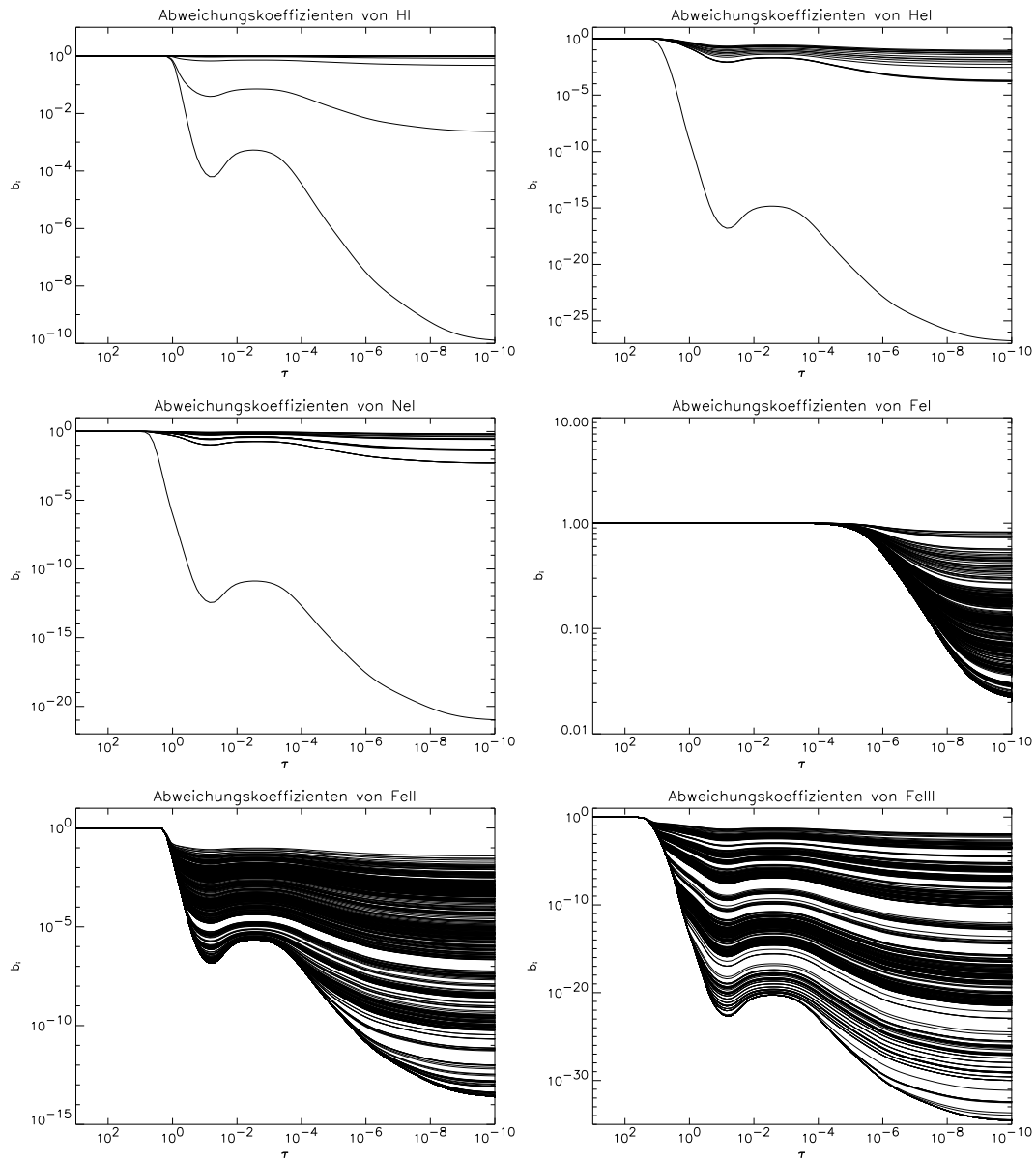
In der Abbildung 6.4 sind mehrere Abweichungskoeffizienten eines Modells mit einer Effektivtemperatur von 5200 K und einer Geschwindigkeit  $v_0$  von 3700 km/s bei einem radioaktiven Alter von 30 Tagen dargestellt.

In diesem Modell wurden H I, He I, Ne I, Fe I, Fe II und Fe III im NLTE betrachtet. In jedem betrachteten Ion sind die Abweichungskoeffizienten stark von eins verschieden.

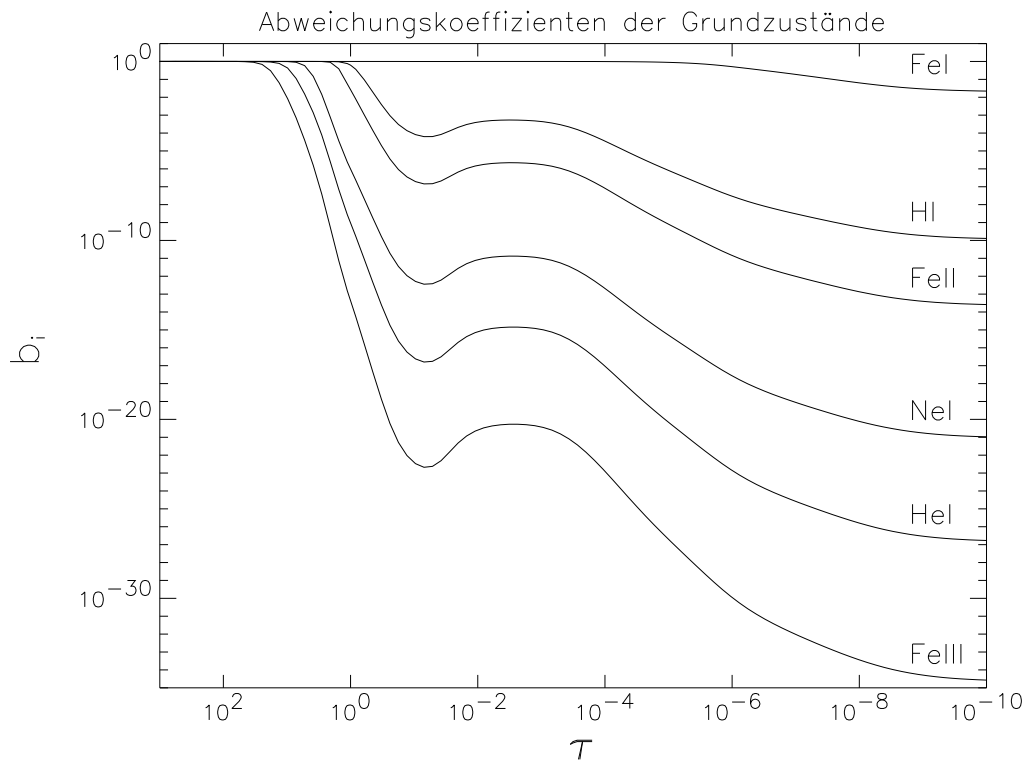
Auffällig ist, dass bei Helium und Neon ein Niveau und bei Wasserstoff zwei Niveaus besonders stark vom LTE abweichen. Bei den Eisenionen sind keine ausgezeichneten Niveaus erkennbar. Die  $b_i$  der vom LTE-Zustand abweichenden Niveaus der Eisenionen bilden eine regelrechte Schar.

Die am stärksten vom LTE abweichenden Zustände sind die jeweiligen Grundzustände. Dies ist in Abbildung 6.5 erkennbar, da dort nur die Abweichungskoeffizienten der Grundzustände von den verschiedenen Ionen dargestellt sind.

Die nächststärkeren Abweichungen gehören zu dem energetisch nächsthöher liegenden Niveau. So ist das andere Niveau des Wasserstoffs, das eine so große Abweichung vom LTE zeigt, der erste angeregte Zustand über dem Grundzustand.

**Abbildung 6.4:**

Für die Ionisationsstufen H I, He I, Ne I, Fe I, Fe II und Fe III sind die Abweichungskoeffizienten dargestellt, die sich durch den Einfluss der radioaktiven Prozesse ergeben. Die radiativen Raten sind in diesen Fällen nicht berücksichtigt worden, so dass sich ohne Radioaktivität LTE einstellen würde.



**Abbildung 6.5:** In dieser Grafik sind die Abweichungskoeffizienten der Grundzustände der Ionen H I, He I, Ne I, Fe I, Fe II und Fe III für die Einwirkung von Radioaktivität unter Vernachlässigung der radiativen Raten dargestellt.

Bis auf wenige Ausnahmen gilt:<sup>3</sup>

Je energetisch höher das Niveau liegt, desto geringer weicht der Wert des zugehörigen  $b_i$  von eins ab.

Dies liegt daran, dass gegenüber der LTE-Beschreibung der Grundzustand durch nichtthermische Elektronenstöße entvölkert wurde und diese erniedrigte Besetzungszahl über die Stoßraten an die energetisch höherliegenden Niveaus koppelt. Diese Kopplung ist für energetisch benachbarte Niveaus größer, so dass der Einfluss der radioaktiven Prozesse auf die Besetzungszahlen der höherliegenden Niveaus mit steigender Energie immer geringer wird. Jedoch sind die Abweichung für viele Niveaus sehr ähnlich. So kann man bei Wasserstoff von den 30 betrachteten Niveaus nur fünf verschiedene ausmachen. Die obersten 26 Niveaus haben fast identische Abweichungskoeffizienten.

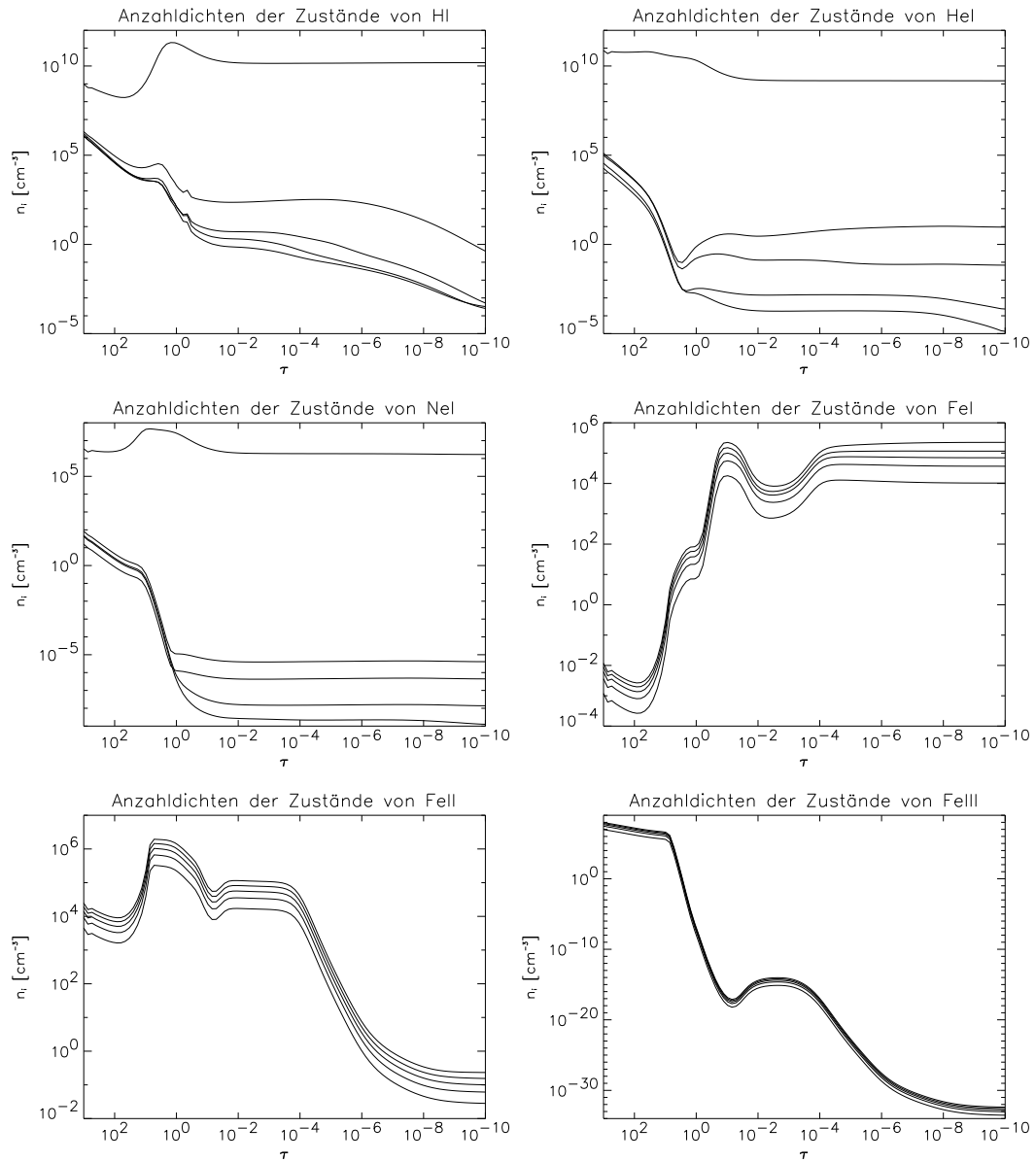
Die Scharen von  $b_i$ -Verläufen bei den Eisenionen entstehen, da dort viel mehr Niveaus betrachtet werden, die vergleichbare Energieeigenwerte besitzen. So sind die Unterschiede z.B. bei den ersten 60 Niveaus von Fe II so gering, dass sie im Maßstab der Darstellung in Abbildung 6.4 nicht unterschieden werden können.

<sup>3</sup>Das 17. Niveau von Ne I weicht geringer ab als das 18. und 19. Niveau. Im Weiteren stimmt die Regel wieder.

Die Abweichungskoeffizienten sind kein direktes Maß für die tatsächlichen Anzahldichten der Zustände. In Abbildung 6.6 sind die Anzahldichten der ersten fünf Niveaus von den betrachteten Ionen dargestellt. Die Größe  $n_i$  gibt dabei die Anzahl der Ionen des Elements pro Kubikcentimeter an, die sich in dem betrachteten Zustand befinden.

Die Grundzustände sind am stärksten besetzt, während die höheren Niveaus immer schwächer besetzt werden. Die nichtthermischen Elektronen bewirken daher keine Besetzungsinversion.

Die radioaktiven Prozesse haben dennoch einen großen Einfluss auf die Besetzungszahlen (siehe Abbildung 6.4). Per Definition beeinflussen die nichtthermischen Raten den Grundzustand. Da dieser ebenfalls am stärksten besetzt ist, ist der Einfluss der Radioaktivität auf das Spektrum entsprechend groß und muss bei der Modellierung berücksichtigt werden.

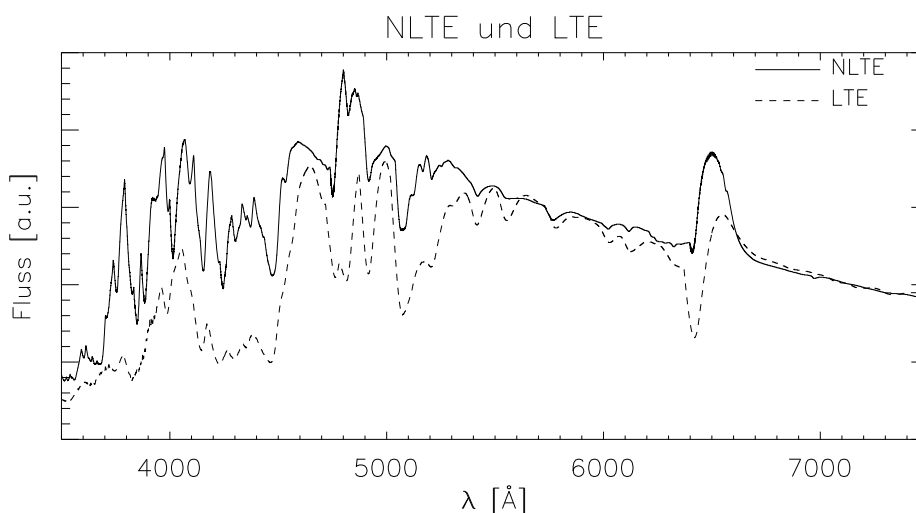


**Abbildung 6.6:** Für die Ionisationsstufen HI, HeI, HeII, FeI, FeII und FeIII sind die Anzahldichten der ersten fünf Zustände dargestellt. Die energetisch niedrigeren Zustände sind hierbei immer stärker besetzt als die übrigen Zustände.



## 6.6 Einfluss des NLTE

In der theoretischen Beschreibung des Strahlungstransportes wurde häufig betont, dass sich eine Supernova–Atmosphäre im NLTE befindet. Um zu überprüfen, wie groß der Einfluss des NLTE auf die Bildung des Spektrums ist, werden zwei Spektren verglichen. Das eine Spektrum stammt von einem NLTE–Modell, das H I, He I, C I, C II, N I, N II, O I, O II, Fe I, Fe II, Fe III, Ni I, Ni II und Ni III im NLTE betrachtet.<sup>4</sup> Dem gegenüber steht ein reines LTE–Modell. Damit der Einfluss der sich ändernden Besetzungszahlen und nicht der geänderten Temperaturstruktur sichtbar ist, wurde das LTE–Modell von dem NLTE–Modell aus iteriert. Dabei wurde jedoch keine Temperaturkorrektur verwendet, so dass die Temperaturstrukturen der beiden Modelle identisch sind. Der Vergleich der beiden Modelle ist in Abbildung 6.7 dargestellt.



**Abbildung 6.7:** Zwei Spektren von Modellen mit identischer Temperatur- und Geschwindigkeitsstruktur sind übereinander abgebildet. Ein Modell betrachtet wichtige Elemente im NLTE, während das andere alle Elemente im LTE betrachtet.

Die Spektren sind nicht normiert. Die Übereinstimmung des Kontinuums ab 7000 Ångström zu längeren Wellenlängen gilt daher absolut. In diesem Teil des betrachteten Spektrums sind die Ergebnisse des NLTE und des LTE sehr ähnlich. Es ergeben sich nur geringe Abweichungen im genauen Verlauf des Kontinuums. Von 7000 Ångström an zu kürzeren Wellenlängen weichen die Spektren dagegen erheblich voneinander ab.

Die  $H_{\alpha}$ -Linie besitzt im Falle des LTE eine stärker ausgeprägte Absorptionskomponente, wohingegen die Emissionskomponente gegenüber dem Fall des NLTE schwächer ausgeprägt ist. Das Zentrum der Linienemission ist im LTE–Fall gegenüber dem NLTE zu längeren Wellenlängen verschoben. Dies ist ein reiner NLTE–Effekt, da sowohl die Temperatur- als auch

<sup>4</sup>Nach den Überlegungen aus Abschnitt 6.4 müssten eigentlich Fe IV und Ni IV ebenfalls im NLTE betrachtet werden. Jedoch gelang es bei diesem Modell nicht, bei Berücksichtigung dieser beiden Ionen Konvergenz zu erreichen.

die Geschwindigkeitsstruktur der Atmosphäre in beiden Modellen identisch ist. Diese Verschiebung tritt anscheinend nur bei der  $H_{\alpha}$ -Linie stark ausgeprägt auf. Andere Linien finden sich trotz verschiedener Stärken in beiden Modellen bei der nahezu gleichen Wellenlänge wieder. Tendenziell sind aber auch hier die Wellenlängen im LTE-Modell leicht zu längeren Wellenlängen verschoben.

Die Stärke einiger Linien ist im Fall des NLTE sehr viel größer. Linien, die im LTE-Fall nur sehr schwach zu erkennen sind, erscheinen im NLTE-Fall hingegen als sehr stark ausgeprägt. Dies ist bei Wellenlängen zu beobachten, die kleiner als  $4500 \text{ \AA}$  sind. Die Anzahl der sichtbaren Linien in diesem Bereich ist im Fall des NLTE ebenfalls größer.

Die »Doppelspitze« bei ca.  $4850 \text{ \AA}$  ist in allen Beobachtungen (siehe Abbildung 5.4) sichtbar. Im Fall des LTE-Modells ist dieses Merkmal nicht in der beobachteten Form zu erkennen. Dies bedeutet, dass die Betrachtung des NLTE bei der Modellierung von Supernovae in der Tat von entscheidender Bedeutung ist. Ohne die Berücksichtigung von NLTE-Effekten wäre es nicht möglich, eine solche Atmosphäre zu modellieren.

## 6.7 Entstehung des Spektrums

Die Berechnung eines Spektrums beschreibt den Fluss, der aus der obersten betrachteten Schicht der Supernova abgegeben wird. Es ist nun aber ebenfalls interessant, wie ein solches Spektrum in den tiefer gelegenen Schichten aussieht.

In den innersten Schichten gleicht das Spektrum dem eines schwarzen Körpers. Je größer die mittlere freie Weglänge der Photonen wird, desto größer sind die Abweichungen von der vollständigen Absorption und das Spektrum verändert sich. Es entstehen Spektrallinien und das Maximum der Intensität verschiebt sich.

Diese Entwicklung kann mit Hilfe von PHOENIX visualisiert werden. Dazu wird die spezifische Intensität im Lagrangesystem in jeder Schicht benötigt.

In der Lösung der Strahlungstransportgleichung werden in jeder Schicht für verschiedene Winkel zu der Normalen die Intensitäten berechnet und sind daher bekannt. Die Winkelauflösung steigt, je weiter außen sich die Schicht befindet, da dort mehr Charakteristiken die betreffende Schicht schneiden.

In jeder Schicht ist daher die Winkelauflösung verschieden. Das verwendete Wellenlängengitter ist jedoch in allen mitbewegten System identisch. Wären die Schichten nicht in Bewegung, könnte das Spektrum auf diesem Wellenlängengitter berechnet werden.

Das Spektrum wird berechnet, indem die winkelabhängige ausgehende Intensität der obersten Schicht in das System des Beobachters lorentztransformiert und dort über alle Winkel integriert wird. Für die tiefenabhängigen Spektren geschieht dies auf die gleiche Art und Weise, jedoch werden die Intensitäten wegen des tiefenabhängigen Geschwindigkeitsprofils der Atmosphäre verschieden transformiert.

Die bis hierhin identischen Wellenlängengitter werden unterschiedlich transformiert (siehe (B.3)). Die dabei auftretenden Wellenlängenverschiebungen liegen in der Größenordnung von ca.  $50$  bis  $100 \text{ \AA}$ .

Die  $\mu s$  werden ebenfalls transformiert (siehe (B.6)) und können hierbei ihr Vorzeichen von

negativ zu positiv wechseln. Dies bedeutet, dass Charakteristiken, die im Lagrangesystem noch einfallend waren, im Eulersystem von der betrachteten Schicht nach außen laufen. Damit die Spektren aus verschiedenen Schichten vergleichbar sind, müssen die transformierten Intensitäten auf ein neues Wellengitter interpoliert werden.

Bei der Berechnung der Spektren wird über die Intensitäten integriert, die ein positives  $\mu$  besitzen. Eine Integration über alle  $\mu$ s würde der Berechnung des Nettoflusses entsprechen, während die Integration über die positiven  $\mu$ s nur den nach außen gerichteten Fluss bestimmt. Die Spektren sollen so dargestellt werden, wie sie einem Beobachter erscheinen würden, wenn die äußeren Schichten der Atmosphäre nach und nach entfernt würden, ohne dabei die Struktur der Atmosphäre zu verändern. Diese Spektren entsprechen dem nach außen gerichteten Fluss.

Dieser Fluss ist in den tiefen Schichten größer, so dass die Spektren normiert werden müssen, um die Entwicklung des Spektrums zu beobachten.

Der Fluss kann sowohl über das Integral über die Wellenlänge als auch über das Maximum normiert werden. In diesem Fall wurde die Normierung über das Maximum des Flusses gewählt. Dadurch ist die Entwicklung des Intensitätsmaximums von Schicht zu Schicht am besten zu erkennen.

Abbildung 6.8 zeigt das tiefenabhängige Spektrum des Modells, dessen Spektrum in Abbildung 7.1 dargestellt ist.

In den innersten zehn Schichten entspricht das Spektrum dem eines schwarzen Körpers. Dies ist in Abbildung 6.9 besonders deutlich erkennbar. In dieser Darstellung wurden die Reihenfolge der Schichten vertauscht, so dass sich die Blickrichtung umkehrt.

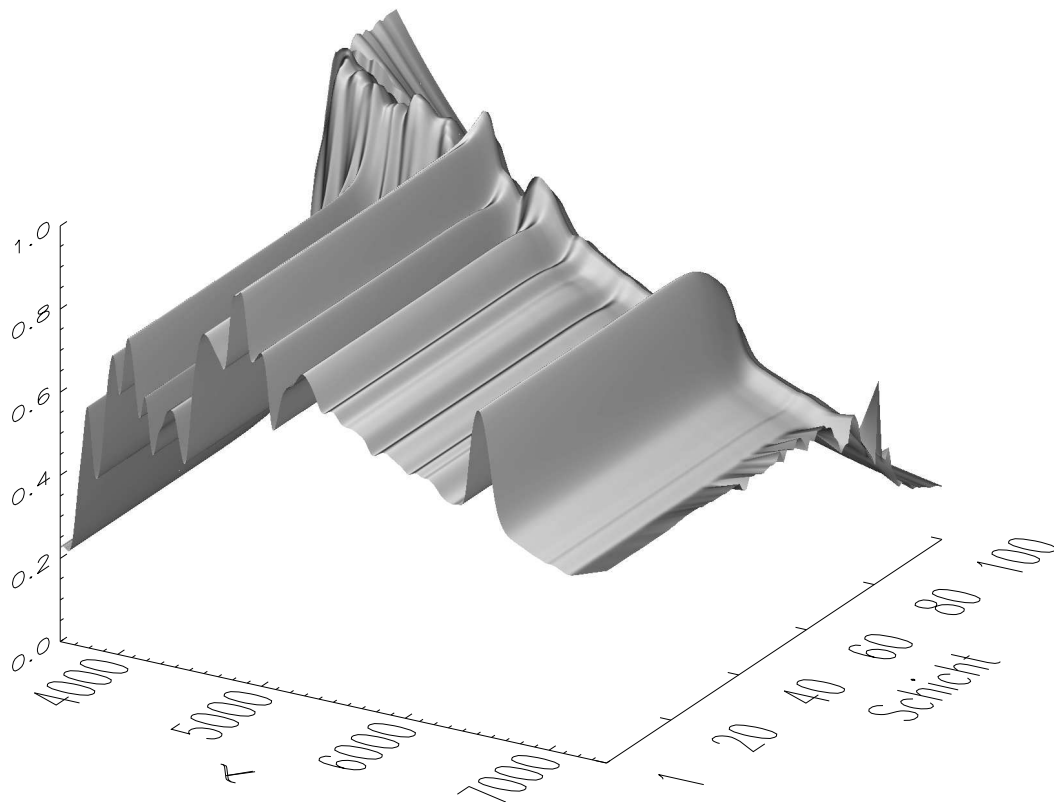
Ab der 15. Schicht treten zunächst kleinere Abweichungen vom Planckspektrum auf, die bei höhergelegenen Schichten immer größer werden.

Aus diesen Abweichungen heraus entwickeln sich die Spektrallinien und das beobachtbare Spektrum entsteht. Die Entwicklung der Spektrallinien vollzieht sich innerhalb von ca. 25 Schichten. In den weiter außen gelegenen Schichten ändert sich das Spektrum nicht mehr merklich. In diesen Schichten ist die Atmosphäre bereits optisch dünn und der Einfluss auf das Spektrum ist dementsprechend gering.

Wie groß die Abweichungen des Modellspektrums vom Spektrum eines schwarzen Körpers tatsächlich sind, wird deutlich, wenn das Spektrum in jeder Schicht durch die lokale Planckfunktion dividiert wird. Hierbei wird ebenfalls deutlich, wie groß die Übereinstimmung der Spektren in den innersten Schichten mit dem Planckspektrum ist.

Das durch die lokalen Planckfunktionen dividierte tiefenabhängige Spektrum ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Wie erwartet ist das Verhältnis in den inneren Schichten für alle Wellenlängen identisch. Da beide Spektren normiert sind, ergibt sich das Verhältnis zu eins. Das Strahlungsfeld in den innersten Schichten entspricht daher in der Tat in sehr guter Näherung dem eines schwarzen Körpers.

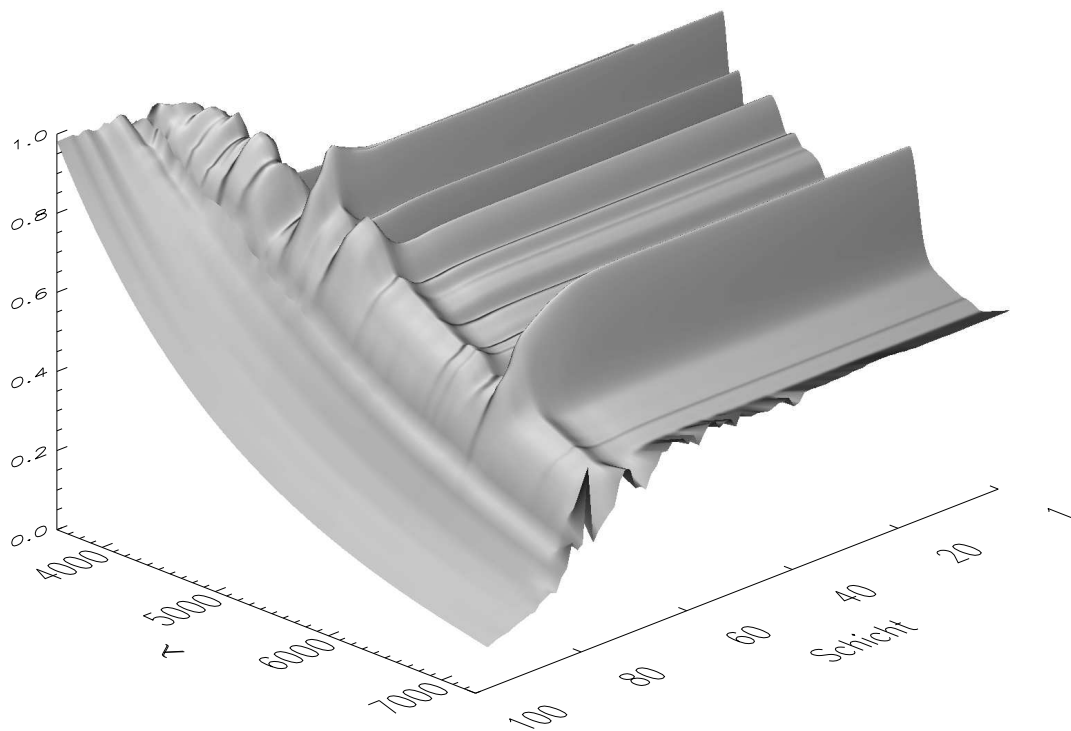
Je weiter man nach außen geht, desto größer werden die Abweichungen. Besonders die Linien, deren Wellenlänge kleiner als  $5000 \text{ \AA}$  ist, weichen besonders stark vom Planckschen Strahlungsfeld ab. In diesem Wellenlängenbereich ist der Fluss bis zu viermal so groß wie der von der lokalen Planckfunktion vorhergesagte Fluss.



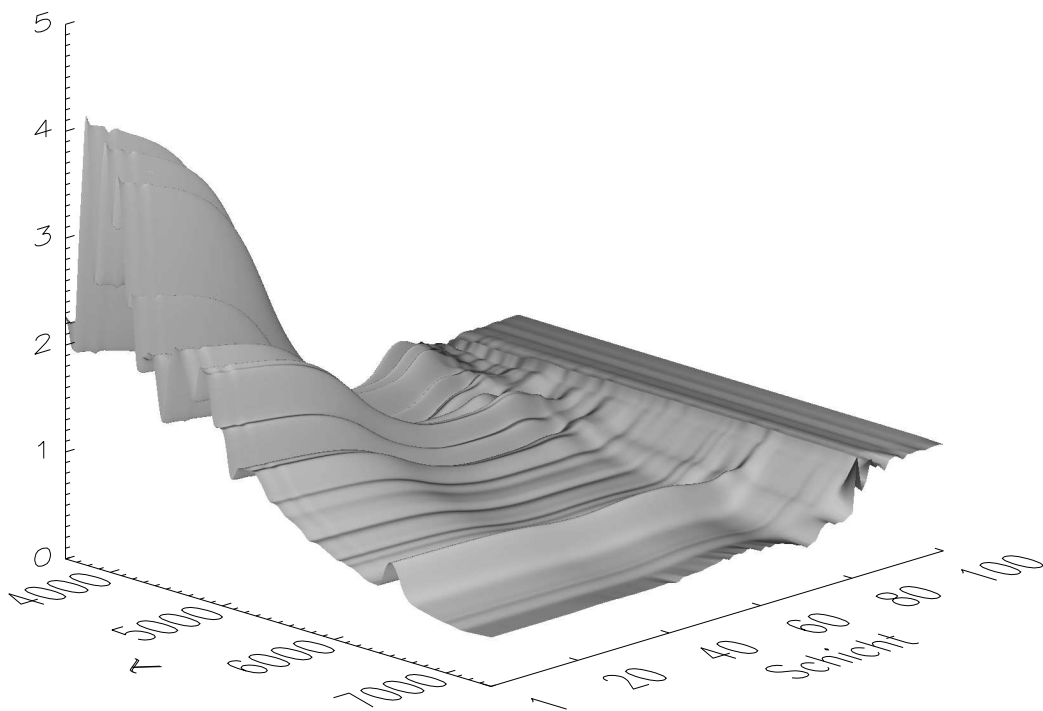
**Abbildung 6.8:** Es ist die tiefenabhängige Entwicklung des Spektrums von dem Modell aus Abbildung 7.1 dargestellt. Die jeweiligen Spektren sind auf das Maximum der Intensität in der jeweiligen Schicht normiert. Die Z-Achse gibt daher das Verhältnis aus dem Maximum des Flusses in der jeweiligen Schicht zu dem Fluss bei der gegebenen Wellenlänge an.

In den Abbildungen 6.8 bis 6.10 ist nicht mehr die gesamte Information des Spektrums enthalten. In diesen Darstellungen wurden die Flüsse auf ein gröberes Wellenlängengitter interpoliert und der Verlauf des Spektrums geglättet. Dies war für eine bessere Darstellbarkeit der Ergebnisse nötig.

Die an der langwelligen Grenze des Wellenlängenbereichs in den Abbildungen 6.8, 6.9 und 6.10 erkennbaren Strukturen sind keine physikalischen Strukturen im Spektrum, sondern stammen aus der Interpolation der Intensitäten auf eine neues Wellenlängengitter.



**Abbildung 6.9:** Es ist die tiefenabhängige Entwicklung des Spektrums von dem Modell aus Abbildung 7.1 dargestellt. Die jeweiligen Spektren sind auf das Maximum der Intensität in der jeweiligen Schicht normiert. In Gegensatz zu Abbildung 6.8 ist die Blickrichtung vertauscht. Die Z-Achse gibt daher das Verhältnis aus dem Maximum des Flusses in der jeweiligen Schicht zu dem Fluss bei der gegebenen Wellenlänge an.



**Abbildung 6.10:** In dieser Abbildung ist der Quotient aus dem tiefenabhängigen Spektrum mit der lokalen Planckfunktion dargestellt. Die Z-Achse gibt das Verhältnis der beiden normierten Flüsse bei der jeweiligen Wellenlänge und Schicht an. Je stärker das Verhältnis von eins abweicht, desto größer sind die Abweichungen von dem lokalen Planckschen Strahlungsfeld.

## Kapitel 7

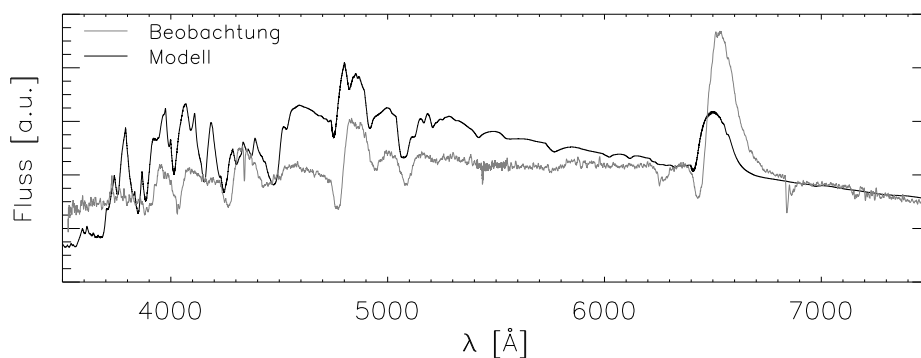
# Ergebnisse der Modellrechnungen

### 7.1 Ergebnisse der Startwerte

Ausgehend von den Abschätzungen der Effektivtemperatur (siehe Abschnitt 6.2) und der Geschwindigkeit (siehe Abschnitt 6.3) für die Modellparameter der Berechnung des Spektrums vom vierten Februar wurden mehrere Modelle von Supernova-Atmosphären angefertigt, in denen die Schätzwerte der Parameter leicht variiert wurden. Die Spektren dieser Modelle reproduzierten die Beobachtung nur ungenügend.

Die Modellspektren wurden daraufhin durch Einbinden von Elementen in die NLTE-Betrachtung verbessert. Dabei zeigte sich bei einem Modell eine stark verbesserte Übereinstimmung von einigen Merkmalen im Modellspektrum mit denen im gemessenen Spektrum vom vierten Februar.

Dieses Modellspektrum ist in Abbildung 7.1 der Beobachtung gegenübergestellt.



**Abbildung 7.1:** Ein Modellspektrum ist über dem gemessenen Spektrum vom vierten Februar dargestellt.

Dieses Modell hat eine Effektivtemperatur von 5600 K, eine Geschwindigkeit von 6300 km/s und ein radioaktives Alter von zwölf Tagen. Bei einem Dichteexponenten von  $n = 11$  werden H I, He I, C I, C II, N I, N II, O I, O II, Fe I, Fe II, Fe III, Ni I, Ni II und Ni III im NLTE berücksichtigt. Wegen der großen Expansionsgeschwindigkeit ist das Modellspektrum ge-

genüber dem gemessenen stark blauverschoben. Von 4500 Å zu längeren Wellenlängen hin reproduziert das Modell den Verlauf des Spektrums recht gut. Die wichtigsten Linienmerkmale werden in ihrer Form und relativen Stärke untereinander richtig wiedergegeben. Jedoch ist der Emissionsteil der  $H_{\alpha}$ -Linie wie der Absorptionsanteil zu schwach ausgeprägt. Weiterhin steigt der Fluss des Kontinuums zwischen 5200 und 6200 Å zu kurzen Wellenlängen zu stark an.

Bei Wellenlängen, die kürzer als 4500 Å sind, weicht das Spektrum dagegen erheblich von der Beobachtung ab. Jedoch ist auch in diesem Bereich bei ca. 4030 Å ein Absorptionsmerkmal im Spektrum sichtbar, das in vergleichbarer Stärke ebenfalls in der Beobachtung erkennbar ist.

Um die Qualität des Modellspektrums zu verbessern, wurden von diesem Modell ausgehend Serien gerechnet, in denen jeweils die Effektivtemperatur, der Dichteexponent oder das radioaktive Alter systematisch variiert wurde. Das Ziel dabei war, aus etwaigen Verbesserungen des Spektrums bei Änderung eines Parameters den Wertebereich dieses Parameters weiter einzuschränken.

## 7.2 Variation der Effektivtemperatur

Die Effektivtemperatur des Modells wurde zwischen 5000 und 6400 K variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.2 dargestellt.

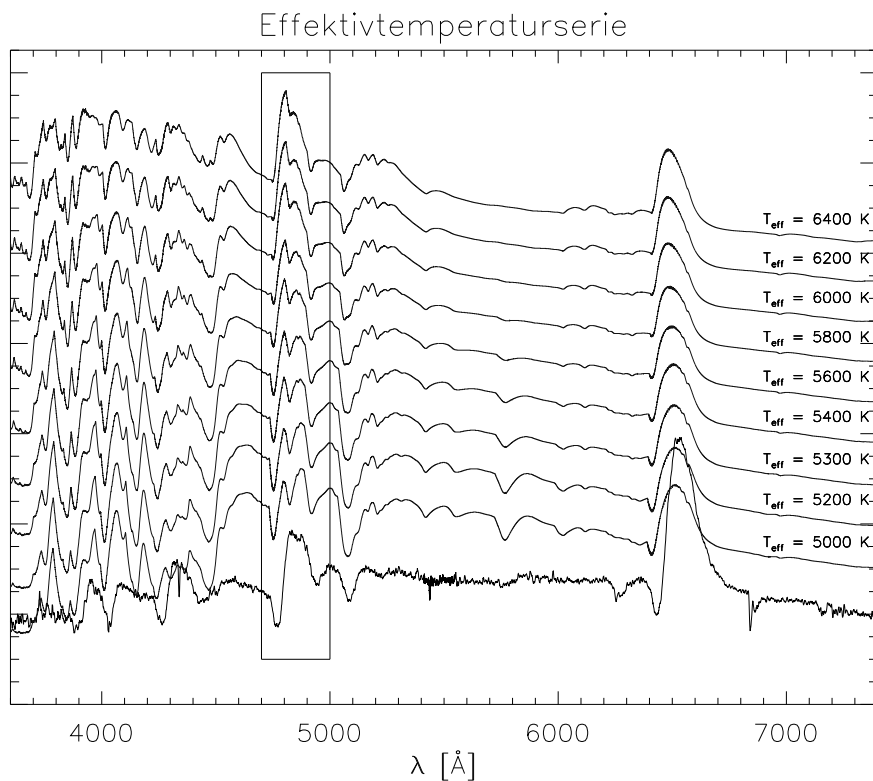
In dem durch den Kasten markierten Wellenlängenbereich zwischen 4700 Å und 5000 Å ist wiederum eine Variation des mit »Doppelspitze« bezeichneten Linienmerkmals erkennbar, das bereits bei der Abschätzung der Geschwindigkeit (siehe Abbildung 6.2) benutzt wurde. Bei der Abschätzung der Effektivtemperatur in Abschnitt 6.2 war eine Abhängigkeit dieses Merkmals von der Temperatur noch nicht erkennbar.

In Abbildung 7.2 ist der Trend erkennbar, dass bei höherer Effektivtemperatur der kurzwelligere Teil der »Doppelspitze« stärker emittiert und bei niedrigerer Effektivtemperatur die Emission geringer wird.

In Abschnitt 6.3 wurde festgestellt, dass bei einer Variation der Expansionsgeschwindigkeit sich das Verhältnis der beiden Emissionslinien ebenfalls ändert. Daher liegt unter der Berücksichtigung der Ergebnisse aus Abschnitt 6.3 die Vermutung nahe, dass die Form der »Doppelspitze« auch von einem kälteren und langsameren oder einem schnelleren und heißeren Modell reproduziert wird.

Zu höheren Effektivtemperaturen hin werden die Absorptionsanteile der P-Cygni-Profile immer weniger ausgeprägt. Dies spricht gegen eine Erhöhung der Temperatur, da deutliche Absorptionsanteile beobachtet werden (siehe Abbildung 5.4). Jedoch werden in Abbildung 7.2 bei steigender Effektivtemperatur die Schwankungen des Teils des Spektrums mit Wellenlängen, die kleiner als 4500 Å sind, immer geringer. Weiterhin verschwinden bei steigender Effektivtemperatur die Linien im Kontinuum zwischen 5300 und 6200 Å. Dies spricht dafür, ein Modell mit höherer Effektivtemperatur und höherer Geschwindigkeit als Alternative anzusehen.





**Abbildung 7.2:** Ausgehend vom Modell aus Abbildung 7.1 wurde die Effektivtemperatur zwischen 5000 und 6400 K variiert. Der Kasten markiert ein Merkmal des Spektrums, das sich deutlich bei Variation der Geschwindigkeit ändert. Die Einheit des Flusses ist für eine übersichtlichere Darstellung willkürlich gewählt.

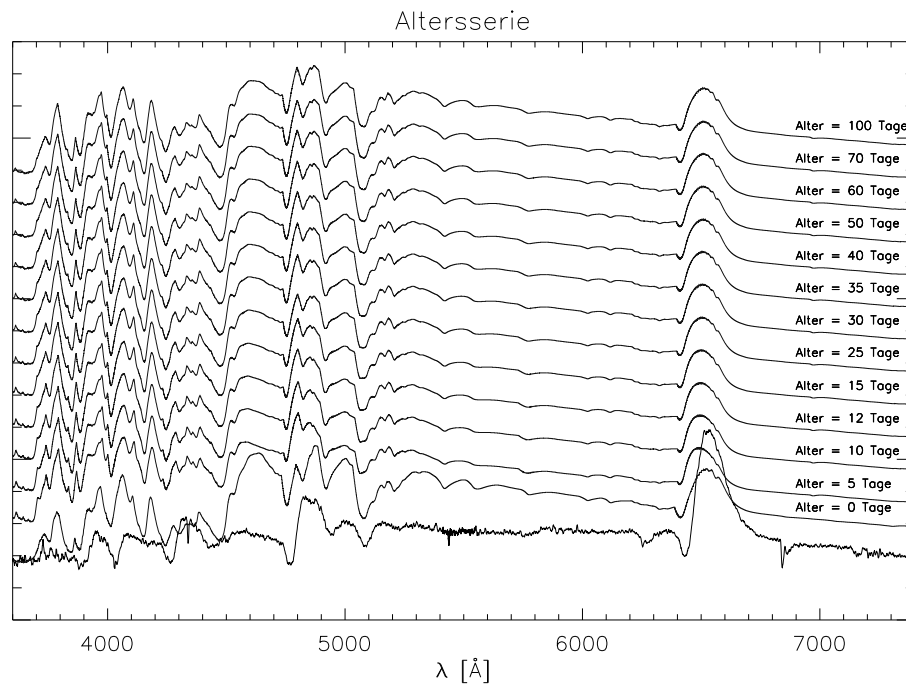
### 7.3 Variation des radioaktiven Alters

In Abbildung 7.3 sind die Ergebnisse der Variation des radioaktiven Alters des Supernovamodells aus Abbildung 7.1 dargestellt.

Das radioaktive Alter wurde zwischen null und 100 Tagen variiert. Die Spektren der Modelle, die ein von null verschiedenes Alter besitzen, unterscheiden sich kaum voneinander. Im Wellenlängenbereich zwischen 5600 und 5800 Å flacht lediglich der Fluss zu kleinen Altern hin ab, und die längerwellige Komponente der »Doppelspitze« gewinnt bei steigendem Alter an Stärke.

Das Spektrum mit einem Alter von null Tagen zeigt hingegen große Unterschiede zu den restlichen Spektren. Ein radioaktives Alter von null Tagen bedeutet, dass die Effekte der Radioaktivität ganz vernachlässigt wurden. Die Höhe und das Verhältnis der Stärke der Spektrallinien ist stark unterschiedlich. Dies ist wiederum am Beispiel der »Doppelspitze« zu erkennen, da im Gegensatz zu den Fällen mit fortgeschrittenem radioaktiven Zerfall die längerwellige Komponente sehr stark dominiert.

Aus dieser Serie wird deutlich, dass das genaue Alter der Supernova im betrachteten Varia-



**Abbildung 7.3:** In dem Modell aus Abbildung 7.1 wurde das radioaktive Alter zwischen null und 100 Tagen variiert. Ein Alter von null Tagen bedeutet, dass die Radioaktivität nicht berücksichtigt wurde. Die Einheit des Flusses ist für eine übersichtlichere Darstellung willkürlich gewählt.

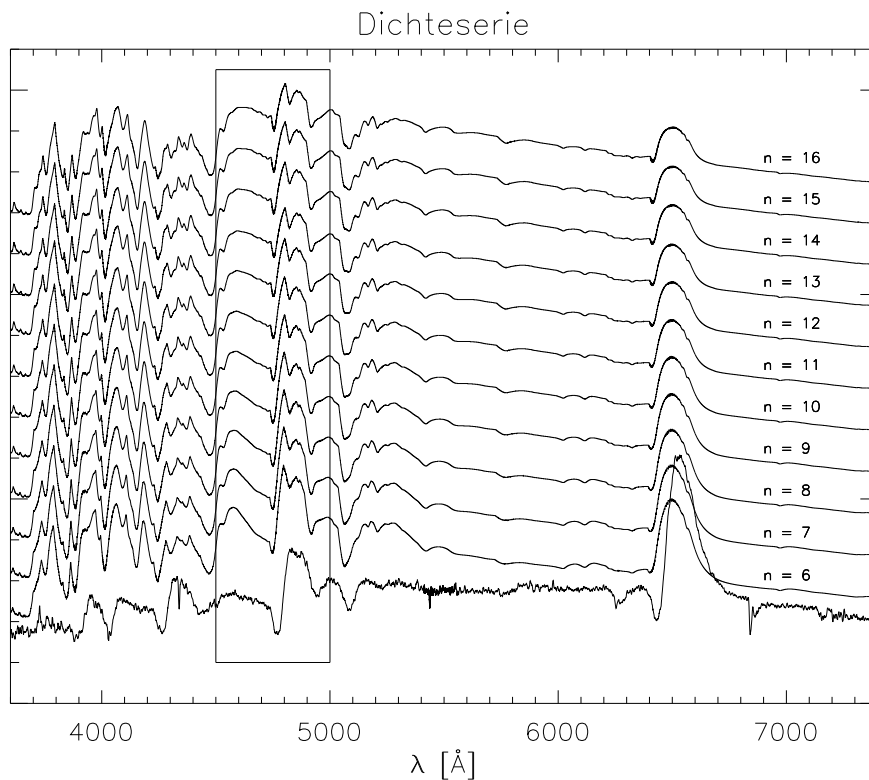
tionsbereich von 100 Tagen keinen entscheidenden Einfluss auf das Spektrum hat. Die ab einem Alter von 50 Tagen auftretenden Unterschiede zu den jüngeren Modellen schränken das mögliche Alter auf einen Bereich von zehn bis 40 Tagen ein. Insgesamt wird jedoch deutlich, dass der Einfluss der Radioaktivität auf das Spektrum groß ist und nicht vernachlässigt werden kann.

## 7.4 Variation des Dichteexponenten

In dem Modell aus Abbildung 7.1 wurde auch der Exponent des Dichtegesetzes zwischen den Grenzen sechs und 16 variiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.4 dargestellt. Im Gegensatz zum Alter hat die Variation des Dichteexponenten des Supernovamodells einen sichtbaren Einfluss auf das Spektrum. Zunächst nimmt die Stärke der  $H_{\alpha}$ -Emissionslinie mit steigendem Exponenten ab. Weiterhin verändert sich die Form und das Verhältnis der Liniestärken in der in Abbildung 7.4 mit einem Rechteck markierten »Doppelspitze«.

Als quantitatives Maß wird die Größe  $Q$  eingeführt. Diese wird definiert als der Quotient aus den Flüssen der langwelligen Komponente der »Doppelspitze« und dem bei längeren Wellenlängen liegenden nächsten Minimum. Die »Doppelspitze« zeigte sowohl von der Effektivtemperatur als auch der Geschwindigkeit eine starke Abhängigkeit. Die Größe  $Q$  ist dennoch

ein geeignetes Maß für die Abschätzung des Dichteexponenten, da nur bei der Variation des Dichteexponenten  $Q$  sich systematisch ändert. Die Werte für  $Q$  sind für die verschiedenen Modelle und die beobachteten Spektren in Tabelle 7.1 dargestellt. Aus dem Vergleich der Werte folgt, dass für das augenblickliche Modell des vierten Februar ein Dichteexponent von  $n = 9$  ideal ist.



**Abbildung 7.4:** In dem Modell aus Abbildung 7.1 wurde der Dichteexponent zwischen  $n = 6$  und  $n = 16$  variiert. Die Darstellung des Flusses ist für eine übersichtlichere Darstellung willkürlich gewählt.

$n$	$Q$	$n$	$Q$	$n$	$Q$	Tag	$Q$
6	1.44	10	1.38	14	1.31	vierter	1.40
7	1.43	11	1.36	15	1.30	fünfter	1.41
8	1.41	12	1.34	16	1.29	neunter	1.55
9	1.40	13	1.30			elfter	1.63

**Tabelle 7.1:** Die Größe  $Q$  ist für verschiedene Modelle mit unterschiedlichen Dichteexponenten  $n$  und für die vier beobachteten Spektren angegeben.

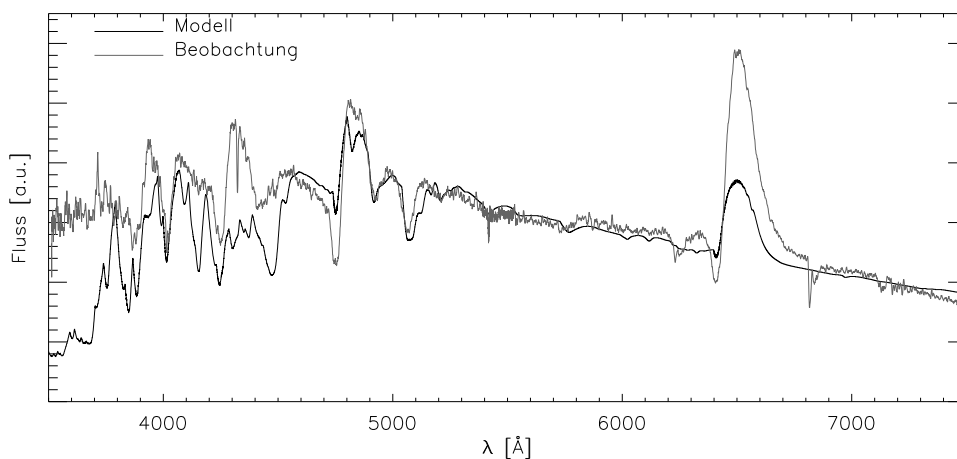
Die Werte von  $Q$  werden bei den gemessenen Spektren mit der Zeit immer größer. Hieraus kann aber nicht auf einen absinkenden Dichteexponenten geschlossen werden. Bei der Modellierung der späteren Tage müssen stattdessen vielmehr die Effektivtemperatur und die Geschwindigkeit angepasst werden, da diese Parameter einen großen Einfluss auf die Form der »Doppelspitze« haben. Bei der Bestimmung des Dichteexponenten mittels  $Q$  wurde jedoch davon ausgegangen, dass die Werte für die Effektivtemperatur und die Geschwindigkeit für die betrachtete Beobachtung annähernd richtig sind.  $Q$  enthält daher einen unbekannt systematischen Fehler.

Für die weitere Modellierung wird aufgrund der obigen Überlegungen ein Dichteexponent von  $n = 9$  und weiterhin ein Alter von zwölf Tagen angenommen.

## 7.5 Erhöhung der Effektivtemperatur und der Extinktion

Der flache Verlauf des Kontinuums der beobachteten Spektren zwischen 5300 und 6200 Å konnte durch keine Variation eines oder mehrerer Modell-Parameter erreicht werden. Dieser Verlauf des Kontinuums hängt empfindlich vom Farbexzess ab, mit dessen Hilfe die interstellare Absorption korrigiert wird. Nach [Schlegel *et al.*, 1998] besitzt der Farbexzess von NGC 2742 den Wert  $E(B - V) = 0.039^m$  und ist mit einer Unsicherheit von 16% bestimmt. Wird der Farbexzess innerhalb der Fehlergrenzen variiert, ist es ebenfalls nicht möglich, den Verlauf des Kontinuums zu modellieren. Dies gelingt erst bei einem angenommenen Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$ . Dies entspricht einem mehr als 600% größeren Wert, liegt jedoch in einem physikalisch durchaus möglichen Wertebereich.

Ein Vergleich eines Modells mit dem beobachteten Spektrum vom vierten Februar bei einem angenommenen Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  und einer angenommenen Rotverschiebung von  $z = 0.008$  ist in Abbildung 7.5 dargestellt.



**Abbildung 7.5:** Vergleich eines Modellspektrums mit der Beobachtung vom vierten Februar, in deren Entrötung ein Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  und die Rotverschiebung zu  $z = 0.008$  angenommen wurde.

Bei dem Modell handelt es sich um dasselbe, das in den vorangegangenen Modellserien als Ausgangspunkt genutzt wurde (siehe Abbildung 7.1). Der Verlauf des Kontinuums zwischen 5300 und 6200 Å wird bei der angenommenen Extinktion gut reproduziert. Wegen der größeren Entrötung ist der Fluss im blauen Bereich des beobachteten Spektrums nun größer als im Modell.

In Abbildung 7.5 wird ebenfalls deutlich, dass die Stärke der  $H_{\alpha}$ -Linie zu gering ist, die Breite des Emissionsanteils jedoch nahezu korrekt reproduziert wird.

Der zu geringe Fluss im Blauen würde durch eine Erhöhung der Effektivtemperatur korrigiert werden. Diese Erhöhung würde ebenfalls bewirken, dass die Temperatur in den optisch dünnen Schichten der Atmosphäre größer wird, was eventuell die Emission der  $H_{\alpha}$ -Linie verstärkt.

Gegenüber den bisherigen Modellierungen muss die Effektivtemperatur in jedem Fall erhöht werden. Jedoch ist nicht bekannt, wie stark die Effektivtemperatur korrigiert werden muss. Der Wert von  $E(B - V) = 0.3^m$  ist nötig, um die Beobachtung an ein Modellspektrum anzupassen, das eigentlich die viel geringere Extinktion mit  $E(B - V) = 0.039^m$  modelliert. Die Effektivtemperatur, die aus dem Farbezess  $E(B - V) = 0.3^m$  folgt, ist daher zunächst willkürlich bestimmt.<sup>1</sup>

Die Extinktion der Muttergalaxie NGC 2742 ist nach [Schlegel *et al.*, 1998] sehr gut bekannt. Alle weiteren Extinktionsquellen liegen daher innerhalb der Galaxie. Aus Abbildung 5.1 ist ersichtlich, dass die Supernova SN 2003Z durch den Halo und nicht durch die Scheibe der Galaxie beobachtet wird.

Die Extinktion muss daher innerhalb des Spiralarms auftreten. Die Stärke der Extinktion ist hierbei jedoch vollkommen unbekannt. Sehr dichte Staubwolken ergeben einen Farbezess von  $E(B - V) \approx 3^m$  [Weigert und Wendker, 1982]. In diesem Fall sind solche Werte jedoch als nicht erreichbare Obergrenze für die Extinktion anzusehen.

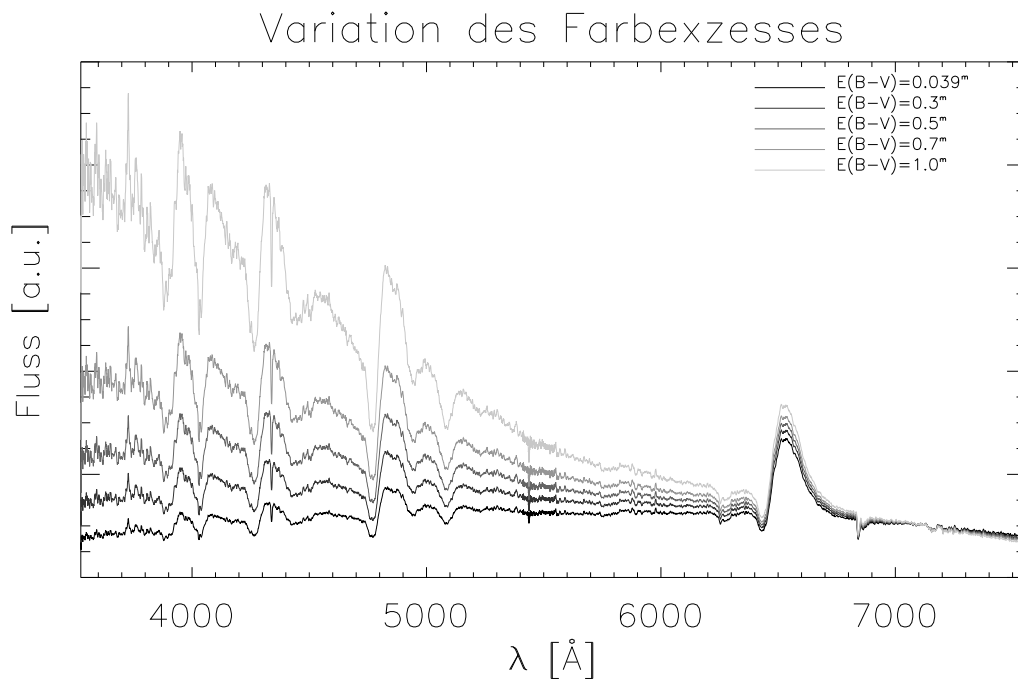
Ein Farbezess von  $E(B - V) = 0.3^m$  kann als Untergrenze der möglichen Extinktion angesehen werden. Dies folgt, da eine prinzipielle Übereinstimmung eines Modellspektrums mit dem beobachteten Spektrum nur durch das Modell aus Abbildung 7.1 reproduziert werden konnte und dieses Modellspektrum einen Farbezess von  $E(B - V) = 0.3^m$  benötigt, um den Verlauf des Kontinuums zu reproduzieren.

In Abbildung 7.6 ist das Spektrum vom vierten Februar für verschiedene Extinktionen dargestellt. Hierbei wurde der Farbezess zwischen den Werten  $E(B - V) = 0.039^m$  und  $E(B - V) = 1^m$  variiert.

Es wird hierbei deutlich, dass eine Vergrößerung der Extinktion gleichzeitig eine Erhöhung der Effektivtemperatur im Modell bedingt, um den Verlauf des Kontinuums modellieren zu können. Um eine Aussage darüber treffen zu können, welche Extinktion und damit welche Effektivtemperatur beobachtet wurde, müssen Modellserien gerechnet werden, in denen die Effektivtemperatur variiert wird. Eindeutige Zuordnungen sind nur dann möglich, wenn die Modellspektren nur für bestimmte Parameter beobachtete Merkmale aufweisen.

---

<sup>1</sup>In Abschnitt 7.5 wird sich zeigen, dass zu hohe Effektivtemperaturen nicht erlaubt sind, da die beobachtete Detailfülle des Spektrums dann nicht reproduziert werden kann.



**Abbildung 7.6:** Die Beobachtung des vierten Februar ist für verschiedene Farbexzesse dargestellt.

Im Folgenden wurden Modellserien gerechnet, in denen die Effektivtemperatur und die Expansionsgeschwindigkeit der Atmosphäre variiert wurden. Die Modellierungen, die in den Abbildungen 7.3 und 7.4 dargestellt sind, haben gezeigt, dass der Einfluss des Dichteexponenten und des Alters keinen großen Einfluss auf die Form des Spektrums im Blauen haben. Bei der Bestimmung des Dichteexponenten wurde das Verhältnis der Flüsse  $Q$  von zwei benachbarten Linienmerkmalen benutzt. Bei der Entrötung der Spektren bleibt das Verhältnis  $Q$  in den beobachteten Spektren erhalten. Die Abschätzung des Dichteexponenten nach Abschnitt 7.4 bleibt daher gültig.

## 7.6 Modelle mit höheren Effektivtemperaturen

Die Qualität der Übereinstimmung des Modells mit der Beobachtung ist für verschiedene Effektivtemperaturen jedoch nicht immer gleich. Je nach Wahl der Modellparameter reproduziert das Modellspektrum charakteristische Merkmale der Beobachtung besser als andere. Im Folgenden werden ausgesuchte Beispiele von Modellen mit höheren Effektivtemperaturen den modifizierten Beobachtungen gegenübergestellt und diskutiert.

In Abbildung 7.7 werden drei Modellspektren mit der Beobachtung vom vierten Februar verglichen. Alle Modellspektren wurden so normiert, dass das langwellige Kontinuum mit der Beobachtung übereinstimmt.

Das Modell im obersten Teil der Abbildung 7.7 besitzt eine Effektivtemperatur von 6400 K und eine charakteristische Expansionsgeschwindigkeit von 7500 km/s.

Das Modell beschreibt die Beobachtung vom vierten Februar am besten bei einem Farbexzess von  $E(B - V) = 0.55^m$ . Der Verlauf des Spektrums wird prinzipiell richtig wiedergegeben. Einige Linien, wie z.B. die »Doppelspitze«, werden sogar in Stärke und Form korrekt reproduziert.

Doch auch Schwächen des Modells sind sichtbar. Das Kontinuum zwischen 5400 und 6200 Å wird vom Verlauf her zwar richtig beschrieben, doch ist der Fluss zu niedrig. Weiterhin treten in den Absorptionsmerkmalen große Abweichungen von der Beobachtung auf. Die Absorptionsmerkmale sind zu klein und teilweise sogar nur angedeutet. So ist z.B. der Absorptionsanteil der  $H_\alpha$ -Linie so gut wie gar nicht ausgebildet.

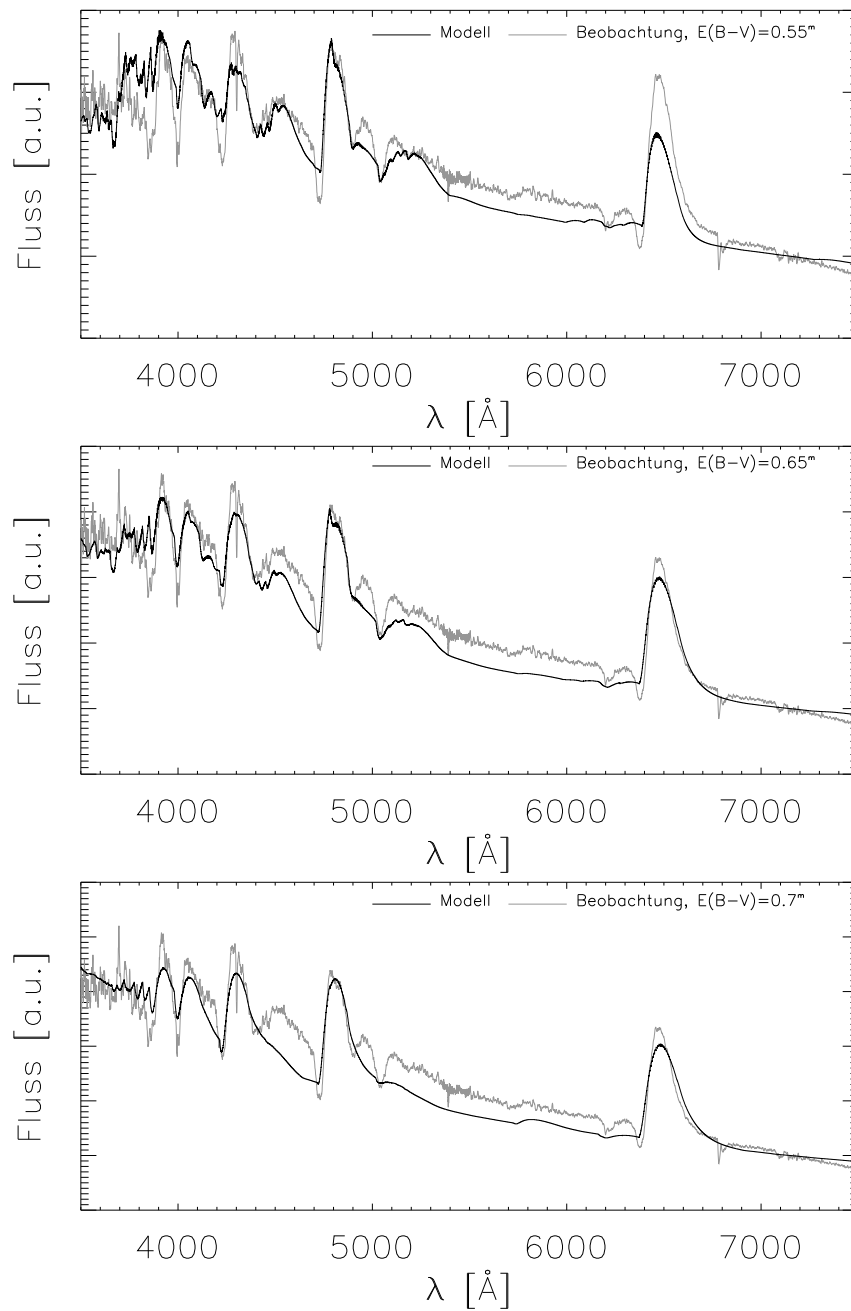
In dem mittleren Teil der Abbildung 7.7 sind die Beobachtung mit  $E(B - V) = 0.65^m$  und ein Modell mit einer Effektivtemperatur von 6400 K und einer Geschwindigkeit von 7800 km/s dargestellt. Wiederum wird der prinzipielle Verlauf des Spektrums reproduziert, wobei die Absorptionslinien so gut wie nicht sichtbar sind. Es sind im blauen Spektralbereich weniger Spektrallinien zu sehen als bei dem Modell mit 6400 K.

Weiterhin ist die Stärke des Emissionsanteils der  $H_\alpha$ -Linie sowohl stärker als auch breiter geworden als die des Modellspektrums mit einer Effektivtemperatur von 6400 K. Dies liegt an der erhöhten Effektivtemperatur und Geschwindigkeit der Atmosphäre.

In dem untersten Teil der Abbildung 7.7 ist ein Modell mit einer Effektivtemperatur von 7400 K und einer Geschwindigkeit von 7800 km/s dargestellt. Es sind nur noch wenige Linien sichtbar. Die  $H_\alpha$ -Linie hat gegenüber der des Modells mit 6600 K nicht relativ an Stärke gewonnen, ist jedoch breiter geworden. Die erhöhte Effektivtemperatur bewirkt, dass die optisch dünnen Schichten, in denen sich die  $H_\alpha$ -Linie bildet (siehe Abbildung 6.8), heißer werden, was eine stärkere Emission verursacht. Der gleiche Mechanismus fördert ebenfalls die Emission der anderen Wasserstofflinien, was den Schluss zulässt, dass die weiteren prominenten Emissionslinien ebenfalls vom Wasserstoff stammen.

Die Literaturwerte der ersten Übergänge der Balmer-Serie des Wasserstoffs sind  $H_\alpha = 6563$  Å,  $H_\beta = 4861$  Å,  $H_\gamma = 4342$  Å und  $H_\delta = 4101$  Å. Die relativen Abstände der Linien untereinander stimmen, so dass davon ausgegangen werden kann, dass es sich bei den nächsten drei kürzerwelligen Emissionslinien im Spektrum um die Balmer-Serie des Wasserstoffs handelt.

Die Absorptionsanteile der P-Cygni-Profile der Wasserstofflinien sind kaum noch ausgebildet. Dies liegt daran, dass die Absorption in optisch dickeren und damit langsameren Schichten geschieht als die Emission. Die Blauverschiebung der Absorption ist dadurch geringer als die durch die höhere Temperatur verbreiterte Emissionslinie. Das Absorptionsmerkmal wird daher bei steigenden Effektivtemperaturen überdeckt.



**Abbildung 7.7:** In den obigen Abbildungen sind Modellspektren Beobachtungen mit Farbexzessen von  $E(B - V) = 0.55^m$ ,  $E(B - V) = 0.65^m$  und  $E(B - V) = 0.7^m$  gegenübergestellt. Die Effektivtemperatur der Modelle beträgt von oben nach unten 6400, 6600 und 7400 K.



## 7.7 Modellspektren der SN 2003Z

Die in den Beobachtungen der Supernova SN 2003Z deutlich sichtbaren Absorptionsmerkmale der Wasserstofflinien bedingen eine niedrigere Effektivtemperatur als in den Modellen in Abbildung 7.7 (siehe Abschnitt 7.6). Dies bedeutet, dass der Farbexzess geringer als  $E(B-V) = 0.55^m$  ist. Dieser Wert entspricht der niedrigsten in Abbildung 7.7 betrachteten Effektivtemperatur von 6400 K.

Ein Wert des Farbexzess von  $E(B-V) = 0.3^m$  wurde bereits als untere Grenze identifiziert. Um eine möglichst starke Ausprägung der Absorptionsmerkmale der P-Cygni-Profile zu erhalten, wird in der weiteren Modellierung die Temperatur so niedrig wie möglich gewählt. Dies bedingt den niedrigst möglichen Wert des Farbexzesses, also  $E(B-V) = 0.3^m$ . Aus der kleinstmöglichen Extinktion folgt, dass die Effektivtemperatur ebenfalls so gering wie möglich sein muss. Die Untergrenze für die mögliche Effektivtemperatur ist 5600 K. Dies folgt aus der Abbildung 7.5, da das dargestellte Modell mit einer Effektivtemperatur von 5600 K einen zu geringen Fluss im Blauen, also eine zu geringe Effektivtemperatur zeigt.

Im Folgenden wurde daher eine Serie von Modellen mit verschiedenen Effektivtemperaturen zwischen 5600 und 6400 K begonnen. Gleichzeitig wurde die Geschwindigkeit zwischen 6500 und 7800 km/s variiert. Dieser Geschwindigkeitsbereich wurde gewählt, da aus den Ergebnissen der Modellierungen in Abschnitt 7.2 folgt, dass bei Erhöhung der Effektivtemperatur die Geschwindigkeit ebenfalls erhöht werden sollte. Da das Modell aus Abbildung 7.1 eine Effektivtemperatur von 5600 K und eine Geschwindigkeit von 6500 km/s besitzt, wurden nur größere Geschwindigkeiten betrachtet.

Der Dichteexponent wurde zu  $n = 9$  und das Alter zu zwölf Tagen angenommen. Damit die berechneten Spektren mit der Beobachtung vergleichbar sind, wurden die Ionen Fe I, Fe II, Fe III, Fe IV, H I und He I im NLTE betrachtet.

Für die Beobachtung des vierten Februar ist bei einem Farbexzess von  $E(B-V) = 0.3^m$  eine Effektivtemperatur von 5800 K für die Modellierung am besten geeignet. Die Vergleiche von Ergebnissen aus alten Modellen mit den Beobachtungen ergaben weitere Abschätzungen für die Effektivtemperaturen der anderen Beobachtungstage. So scheint für den neunten Februar eine Effektivtemperatur von 5600 K, für den elften hingegen von 5400 K optimal zu sein.

Anstelle weitere Modellserien für die folgenden Beobachtungstage zu rechnen, wurden von den Parametern des Modells für den vierten Februar ausgehend gezielt Modelle für die folgenden Tage berechnet.

Dabei wurden für die Beobachtung des vierten Februar eine Effektivtemperatur von 5800 K, eine charakteristische Geschwindigkeit von 6500 km/s und ein Alter von zwölf Tagen angenommen.

Das Modell des fünften Februar besitzt eine Effektivtemperatur von 5700 K und eine Geschwindigkeit von 6450 km/s bei einem Alter von 13 Tagen.

Bei entsprechender Erhöhung des Alters wurden für den neunten und elften Februar eine Effektivtemperatur von 5600 K und 5400 K sowie eine Geschwindigkeit von 6300 km/s und 6200 km/s angenommen.

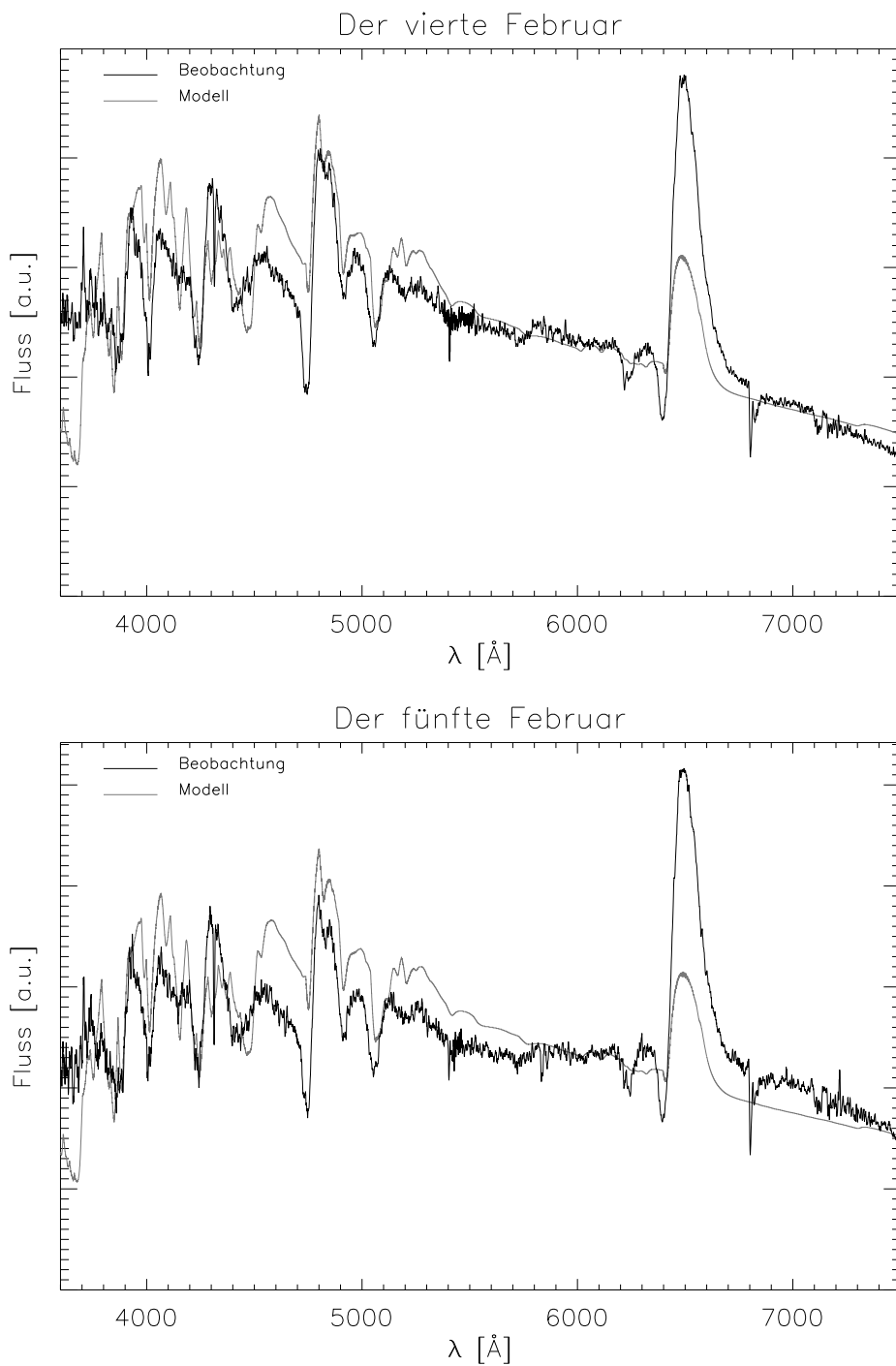
In allen Modellen wurde ein Dichteexponent von  $n = 9$  verwendet und H I, He I sowie Fe I bis Fe IV im NLTE betrachtet. Die Ergebnisse dieser Modellrechnungen sind in den Abbildungen 7.8 und 7.9 dargestellt. Die beobachteten Spektren sind in diesen Abbildungen für einen Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  entrotet und für eine Rotverschiebung von  $z = 0.01$  korrigiert worden. Diese Rotverschiebung wurde gewählt, da in diesem Fall das Modellspektrum des vierten Februar am besten mit der Beobachtung übereinstimmt.

Alle Spektren in diesen Abbildungen wurden auf die Fläche normiert, was bedeutet, dass die Flächen unter dem beobachteten Spektrum und dem Modellspektrum identisch sind.

Im oberen Teil von Abbildung 7.8 sind das Modellspektrum und die Beobachtung vom vierten Februar dargestellt. Im Wellenlängenbereich kleiner als 3800 Å fällt der Fluss im Modellspektrum sehr viel geringer aus, als in der Beobachtung. Bei größeren Wellenlängen folgt das Modell prinzipiell dem Verlauf der Beobachtung. So sind beispielsweise bei ca. 4020, 4240, 4750, 4900 und 5060 Å in beiden Spektren Absorptionsmerkmale sichtbar. Bei ca. 4480 Å zeigt jedoch das Modell eine Absorption, wohingegen die Beobachtung eine Emission zeigt. Andererseits zeigt das Modell bei 3860, 4100 und 4190 Å ein Emissionsmerkmal, während gar keine oder eine nur sehr schwache Emission beobachtet wurde.

Es sind also einige der beobachteten, teils sogar schwachen Merkmale des Spektrums reproduziert worden. Die Stärken von den beobachteten und modellierten Merkmalen stimmen jedoch selten überein. Dies ist besonders gut an der prominenten  $H_\alpha$ -Linie sichtbar. Sie wird zwar reproduziert, aber die Stärke des Emissions- und des Absorptionsteils ist nicht korrekt wiedergegeben. Des Weiteren stimmt die Breite der Emissionskomponente ungefähr mit der Beobachtung überein, die Absorptionskomponente fällt jedoch viel zu schmal aus. Der Verlauf des Kontinuums zwischen 5200 und 6100 Å wird ebenfalls qualitativ richtig, das langwelligere Kontinuum jenseits der  $H_\alpha$ -Linie dagegen nur unzureichend beschrieben.

Grundsätzlich ändert sich im Fall des fünften Februar nichts an diesem Bild. Im unteren Teil der Abbildung 7.8 sind das Modellspektrum und die Beobachtung vom fünften Februar gegenübergestellt. Es finden sich wiederum einige Linien in beiden Spektren wieder, deren Stärken sich jedoch ebenfalls stark unterscheiden. Die große Ähnlichkeit im Vergleich mit dem vierten Februar ist verständlich, da sowohl die Beobachtungen sich nur sehr wenig unterscheiden (siehe oberer Teil von Abbildung 5.6) als auch die Parameter der Modelle nur wenig voneinander abweichen. Da sich die Effektivtemperaturen nur um 100 K und die Geschwindigkeit um 50 km/s unterscheiden, konnte die Entwicklung des Kontinuums vom vierten auf den fünften Februar nicht reproduziert werden (siehe Abschnitt 5.2). Das Kontinuum weicht für den fünften Februar deutlich stärker von der Beobachtung ab, als es am vierten Februar der Fall ist.



**Abbildung 7.8:** Im oberen Teil ist der Beobachtung vom vierten Februar mit einem Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  und einer Rotverschiebung von  $z = 0.01$  ein Modellspektrum gegenübergestellt. Im unteren Teil ist das gleiche für den fünften Februar abgebildet.

Dies verhält sich im Fall des neunten Februar wieder anders. Im oberen Teil der Abbildung 7.9 werden das Modell und die Beobachtung dieses Tages miteinander verglichen.

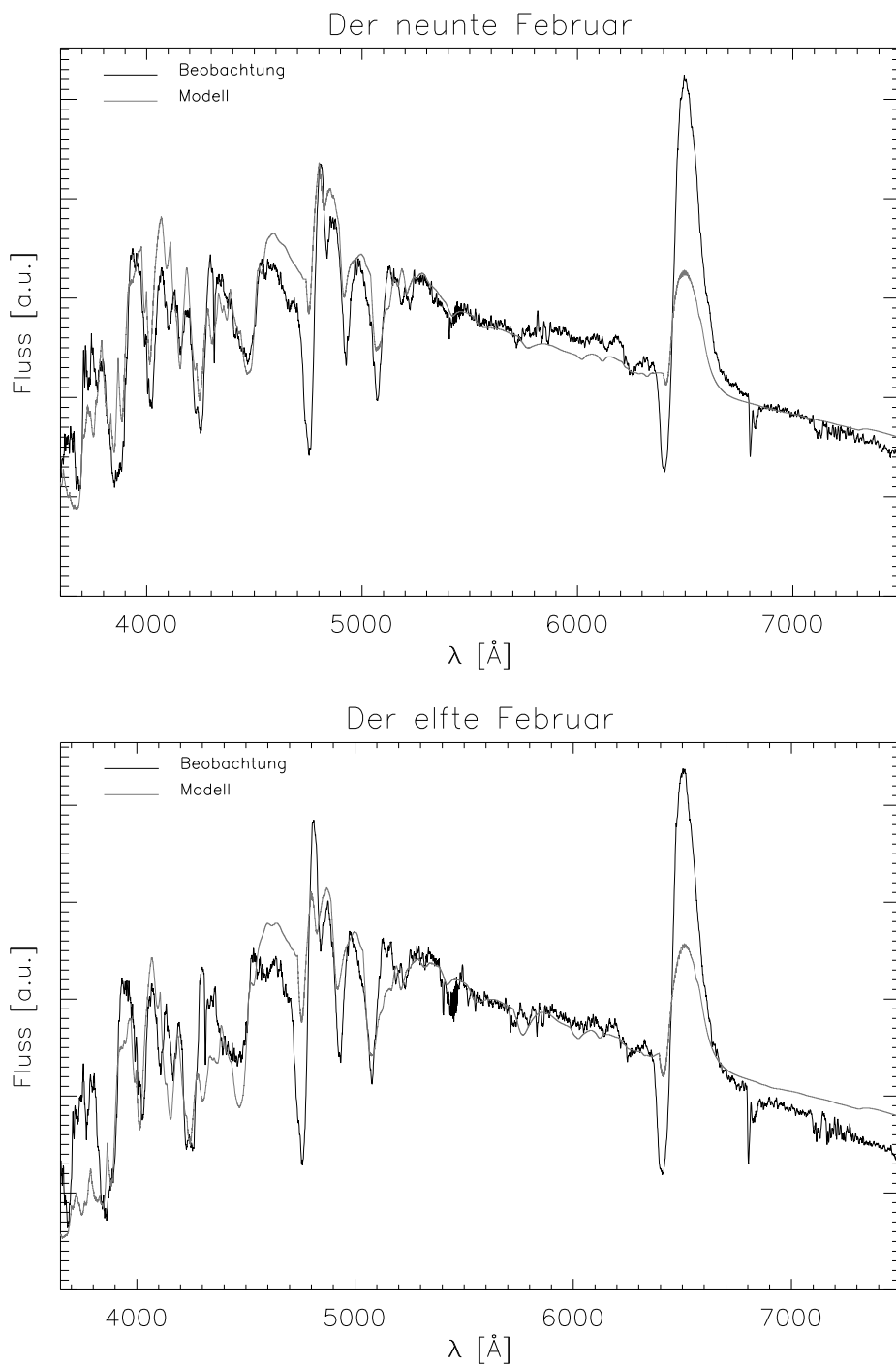
Das Kontinuum wird nun wieder sehr gut reproduziert. Doch auch der Rest des Spektrums wird in diesem Fall sehr gut modelliert. Bei z.B. 4240 und 4480 Å wird nicht nur die Form der Absorptionsmerkmale, sondern auch ihre Stärke annähernd richtig wiedergegeben.

Deutliche Abweichungen sind bei der Breite und Tiefe der Absorptionslinien sichtbar. Die Linien hatten sich in der Beobachtung vom fünften auf den neunten Februar stark vertieft (siehe Abschnitt 5.2). Diese Entwicklung konnte in keinem während dieser Arbeit berechneten Modell nachvollzogen werden, so dass sich bei den Absorptionsmerkmalen große Abweichungen ergeben.

Die ebenfalls am neunten Februar deutlich sichtbare Verschiebung der Wellenlänge konnte jedoch reproduziert werden. Die Wellenlängen der Linien stimmen in Modell und Beobachtung gut überein.

Am elften Februar sind die Abweichungen von Modell und Beobachtung wieder größer. Dies ist im unteren Teil der Abbildung 7.9 dargestellt. Die Übereinstimmung von Form und Stärke der Linien, wie es beim neunten Februar der Fall ist, wird nicht mehr erreicht. Dennoch werden, wie z.B. bei 4020 und 4240 Å, auch hier Linien mit annähernd richtiger Form und Stärke reproduziert. An den eben genannten Beispielen ist ebenfalls ersichtlich, dass das Modell gegenüber der Beobachtung zu stark blauverschoben ist. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit in dem Modell des elften Februar für die angenommene Rotverschiebung zu groß gewählt wurde.

Für die anderen Tage wurde die in Abschnitt 5.2 beschriebene Wellenlängenverschiebung durch die Wahl der Modellparameter an den jeweiligen Tagen richtig beschrieben. Daraus folgt, dass zumindest die Größenordnung der Änderung der Parameter richtig gewählt wurde.



**Abbildung 7.9:** Im oberen Teil ist der Beobachtung vom neunten Februar mit einem Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  und einer Rotverschiebung von  $z = 0.01$  ein Modellspektrum gegenübergestellt. Im unteren Teil ist das gleiche für den elften Februar abgebildet.

## Kapitel 8

# Diskussion der Ergebnisse und Ausblick

Die Vorgehensweise bei der Modellierung der Supernova SN 2003Z lässt sich wie folgt zusammenfassen.

Ausgehend von einem Startmodell wurden Modellserien gerechnet, die jeweils die Effektivtemperatur und das Geschwindigkeitsprofil variierten. Aus den Ergebnissen wurden Schätzwerte für die Effektivtemperatur und das Geschwindigkeitsprofil gewonnen. Im Weiteren wurden die Modelle mit den passenden Parametern durch Betrachtung von Elementen im NLTE verbessert. Es wurde erst eine grobe Übereinstimmung von Modellspektren mit den Beobachtungen gefunden, nachdem H I, He I, C I & II, N I & II, O I & II, Fe I bis III und Ni I bis III im NLTE betrachtet wurden.

Von diesen Modellen ausgehend wurden weitere Modellserien gerechnet. Hierbei wurde nun nicht mehr die Geschwindigkeit variiert, da sie aus den vorherigen Modellen vertrauenswürdig bestimmt zu sein schien. Stattdessen wurden die Effektivtemperatur, das radioaktive Alter und der Dichteexponent variiert.

Es zeigte sich, dass das genaue Alter als maßgebende Größe für die Energiezufuhr durch radioaktive Prozesse keinen großen Einfluss auf das Spektrum besitzt. Unterschiede von mehreren Tagen zeigten keine messbaren Unterschiede in den Spektren. Die Anwesenheit von Radioaktivität ist jedoch notwendig. Bei Vernachlässigen der radioaktiven Prozesse zeigte sich eine schlechtere Übereinstimmung der Spektren.

Variationen der Effektivtemperatur und des Dichteexponenten zeigten, dass diese Größen einen großen Einfluss auf bestimmte Merkmale des Spektrums haben. Das Augenmerk lag hierbei auf einer »Doppelspitze« bei ca. 4850 Å.

Das Verhältnis der Flüsse der beiden Spitzen hing bereits in den ersten Modellserien stark von dem Geschwindigkeitsfeld ab. Daher wurde die Geschwindigkeit aus dem Modell bestimmt, das das Verhältnis am besten widerspiegelte.

Bei dieser frühen Betrachtung zeigte sich noch kein Einfluss der Temperatur auf dieses Verhältnis. Dies zeigte sich erst bei späteren Modellen, die mehr Elemente im NLTE berücksichtigen. Um das korrekte Verhältnis zu erhalten, muss bei Erhöhung der Effektivtemperatur ebenfalls die Expansionsgeschwindigkeit vergrößert werden und umgekehrt.

Der Dichteexponent hat einen Einfluss auf das Verhältnis des mittleren Flusses in der »Dop-

pelspitze« zu dem angrenzenden Kontinuum. Aus dieser Abhängigkeit wurde der Exponent zu  $n = 9$  bestimmt.

Der Verlauf des Kontinuums zwischen 5200 bis 6200 Å in den Beobachtungen unter der Annahme eines Farbexzesses von  $E(B - V) = 0.039^m$  konnte jedoch durch kein zur Verfügung stehendes Modell reproduziert werden. Daher wurde die Extinktion so angepasst, dass das bis dahin in Bezug auf sonstige Linienmerkmale beste Modell das Kontinuum im fraglichen Bereich richtig wiedergibt. Dazu war ein Farbexzess von  $E(B - V) = 0.3^m$  nötig. Die Extinktion wird durch Ansammlungen von Staub verursacht, der in den Spiralarmen von Galaxien durchaus vorkommt. Über die Größe der Extinktion war a priori keine Abschätzung möglich, sie konnte daher prinzipiell jeden in Spiralarmen physikalisch erlaubten Wert annehmen. Eine höhere Extinktion bedingt eine höhere Effektivtemperatur des Modells, so dass eine Modellserie mit höheren Effektivtemperaturen für verschiedene Extinktionen gerechnet wurde.

Es zeigte sich, dass die Modellspektren bei höheren Effektivtemperaturen beobachtete Merkmale, wie z.B. die Absorptionsanteile von P-Cygni-Profilen, nicht mehr reproduzieren konnten. Jedoch konnte aus der bei höheren Effektivtemperaturen stark erhöhten Emission der  $H_\alpha$ -Linie die ebenfalls verstärkte Balmer Serie des Wasserstoffs im Spektrum identifiziert werden.

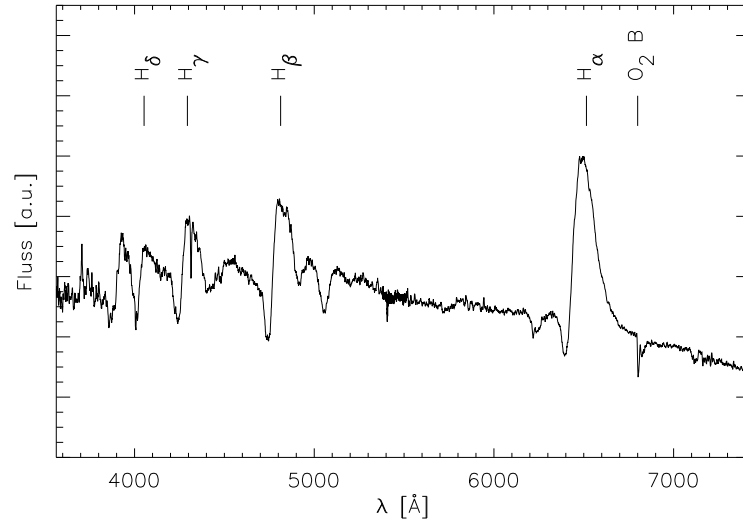
In Abbildung 8.1 sind die identifizierten Linienmerkmale im Spektrum des vierten Februar markiert dargestellt. In der Modellierung war eine Korrektur der Beobachtungen für eine Rotverschiebung von  $z = 0.01$  nötig, damit die modellierten und beobachteten Spektren die gleiche Wellenlängenverschiebung zeigen. Das dargestellte Spektrum wurde für diese angenommene Rotverschiebung korrigiert.

Die als Balmer-Serie des Wasserstoffs identifizierte Serie von Emissionsmerkmalen bei 6515 Å (Lit.:  $H_\alpha = 6563$  Å), 4813 Å (Lit.:  $H_\beta = 4861$  Å), 4294 Å (Lit.:  $H_\gamma = 4342$  Å) und 4053 Å (Lit.:  $H_\delta = 4101$  Å) ist in Abbildung 8.1 um 48 Å gegenüber den Literaturwerten blauverschoben. Weiterhin wurde das Absorptionsband von  $O_2 B$  identifiziert, das ebenfalls in Abbildung 8.1 markiert ist.

Um die Beobachtung bestmöglich zu modellieren, musste die Extinktion so niedrig wie möglich gewählt werden. Die Effektivtemperatur des Modells des vierten Februar wurde aus der Temperaturserie der Modelle gewonnen, die Parameter der übrigen Tage wurden entsprechend der erwarteten physikalischen Entwicklung bestimmt.

Die Modellparameter, die die besten Spektren für die verschiedenen Beobachtungstage der Supernova SN 2003Z ergeben, sind in der Tabelle 8.1 zusammengefasst. Die Werte der Effektivtemperaturen für die ersten drei Beobachtungstage haben einen Fehler von  $\pm 100$  K und die vom elften Februar von  $\pm 200$  K. Dies liegt daran, dass in den entsprechenden Effektivtemperaturbereichen die berechneten Modelle sich um 100 beziehungsweise 200 K unterscheiden. Die Angabe eines Fehlers der Expansionsgeschwindigkeit  $v_0$  ist nicht möglich, denn bisher zur Verfügung stehende Modelle reichen im Fall des vierten Februar nur bis 6500 km/s herab. Die bei kleineren Geschwindigkeiten stärker ausgeprägten Absorptionsmerkmale lassen vermuten, dass die tatsächliche Geschwindigkeit bei noch geringeren Werten zu suchen ist. Die Bestimmung von  $v_0$  ist somit nur als vorläufig zu betrachten.

Der Dichteexponent  $n$  wurde über das Verhältnis  $Q$  von zwei Linienmerkmalen bestimmt.



**Abbildung 8.1:** Es ist das für einen Farbxzess von  $E(B_V) = 0.3^m$  entrötete und für  $z = 0.01$  korrigierte Spektrum vom vierten Februar dargestellt. Die identifizierten Balmerreihe des Wasserstoffs und die Absorptionsbande des Sauerstoffs sind markiert worden.

Februar:

Parameter	vierter	fünfter	neunter	elfter
$T_{\text{eff}}$ [K]	$5800 \pm 100$	$5700 \pm 100$	$5600 \pm 100$	$5400 \pm 200$
$n$	9	9	9	9
$v_0$ [km/s]	6500	6450	6300	6200
Alter [Tage]	12	13	17	19

**Tabelle 8.1:** Es werden die wichtigsten Parameter der verschiedenen Modelle der SN 2003Z angegeben.

Da die Modellspektren jedoch häufig falsche Linienstärken produziert haben, besitzt diese Methode einen großen systematischen Fehler, der nicht quantifizierbar ist. Der Dichteexponent ist demnach lediglich als Schätzwert anzusehen.

Der Einfluss des genauen Alters ist gering. Daher ist das Alter aus den Modellierungen nicht bestimmbar. Die angegebenen Werte sind dabei abgeschätzte Werte, die mit der Beobachtung konform sind. Dies wäre jedoch ebenfalls der Fall, wenn das Alter um 30 Tage größer wäre. Demnach ist das Alter der Supernova vom vierten Februar lediglich ungenau bestimmt, wobei sich die möglichen Werte zwischen sieben und 40 Tagen bewegen.

Die in Abschnitt 7.7 abgebildeten Modellspektren der Supernova SN 2003Z stellen die bis hierhin bestmögliche Modellierung dar. In allen Spektren wurde jedoch angenommen, dass der Farbxzess  $E(B - V) = 0.3^m$  ist. Dieser Wert ist  $\approx 7,7$ -mal größer als aus



[Schlegel *et al.*, 1998] zu entnehmen ist. Der Fehler dieser Größe beläuft sich lediglich auf 16%, so dass der angenommene Wert jenseits der Fehlergrenzen liegt.

Bei einem etwa achtmal größeren Wert des Farbezesses stellt sich die Frage nach der Ursache dieser größeren Extinktion. Der Farbezess der Muttergalaxie NGC 2742 ist vertrauenswürdig durch [Schlegel *et al.*, 1998] gegeben. Demnach kann es sich nur um ein Phänomen innerhalb der Muttergalaxie handeln, wenn diese starke Extinktion der Realität entsprechen sollte. Die Supernova liegt  $8''.4$  westlich und  $31''.0$  nördlich des Zentrums der Galaxie NGC 2742 im Ausläufer eines Spiralarms (siehe Abbildung 5.1). Die Extinktion innerhalb dieses Armes ist unbekannt. Ein Farbezess von  $E(B - V) = 0.3^m$  ist jedoch kein extrem großer Wert, so dass lokale Staubwolken in dem Spiralarm durchaus als Ursache für einen solchen Wert der Extinktion in Frage kommen.

Die Rotverschiebung von  $z = 0.01$  setzt sich aus der für die Muttergalaxie bekannten Rotverschiebung  $z = 0.0043$ , der Ungenauigkeit der Wellängenkalibration  $z = 4/6867 = 0.00058$ , der Eigenbewegung der Erde  $z = 0.00007$  und der Supernova zusammen.

Alle Anteile bis auf die Eigenbewegung der Supernova sind bekannt und ergeben einen Anteil von  $\delta z = 0.00495$  an der Rotverschiebung. Demnach muss die Eigenbewegung der Supernova eine Rotverschiebung von  $z = 0.00505$  beitragen. Daraus folgt ein offensichtlich zu großer Wert für die radiale Eigengeschwindigkeit der Supernova von 1515 km/s. Dieser Wert ist nicht erklärbar. Nach Abbildung 5.1 wird die Supernova unter einem großen Inklinationwinkel beobachtet. Die radiale Bewegung kann demnach lediglich durch eine Bewegung senkrecht zur Scheibe durch den Arm erfolgen. Diese Beobachtung trägt nicht dazu bei, die viel zu große Geschwindigkeit zu erklären.

Halo-Objekte können Geschwindigkeiten von ein paar hundert Kilometern in der Sekunde erreichen und ein Teil der großen Eigenbewegung der Supernova könnte so erklärt werden. Dieser Erklärungsansatz wird jedoch dadurch entkräftet, dass es sich bei SN 2003Z um eine SN II handelt und die Vorgängersterne von SN II eine zu geringe Lebensdauer haben, um ein Halo-Objekt sein zu können.

Als geeignete Lösung des Problems bleibt die Modellierung mit geringeren Expansionsgeschwindigkeiten. Die Modelle des vierten Februar haben eine minimale Geschwindigkeit von 6500 km/s. Sollte die Modellierung mit geringeren Expansionsgeschwindigkeiten gelingen, wäre die Blauverschiebung des Modellspektrums gegenüber der Beobachtung ebenfalls geringer, woraus eine geringere Eigenbewegung der Supernova folgen würde.

Die Ergebnisse der Modellierung zeigen, dass PHOENIX dazu geeignet ist, die Spektren von Supernovae zu berechnen und die grundlegenden physikalischen Parameter zu bestimmen (siehe Tabelle 8.1). Dem widersprechen die vereinfachenden Annahmen, die bei der Beschreibung gemacht wurden. Die Annahme von sphärischer Symmetrie und daher das Vernachlässigen von dreidimensionalen Effekten und die daraus folgende einfache Beschreibung des Dichteverlaufs sind starke Vereinfachungen.

Eine detaillierte Struktur hätte jedoch anscheinend keinen entscheidenden Einfluss auf die Bildung des Spektrums, solange der grundlegende Verlauf der physikalischen Größen wie Dichte und Temperatur richtig wiedergegeben ist. Demnach ist der entscheidende Beitrag zum Spektrum der Strahlungstransport, der von PHOENIX in aller Allgemeinheit nur unter der Annahme von Eindimensionalität und Zeitunabhängigkeit behandelt wird. Außerdem ist klar geworden, dass das Spektrum sensitiv von der Geschwindigkeit und der Effektivtemperatur der Atmosphäre abhängt. Die Entwicklung des Spektrums über den Beobachtungs-

zeitraum konnte als physikalische Entwicklung, nämlich als Abkühlung und Ausdehnung, identifiziert werden.

Obwohl die vereinfachenden Annahmen die Berechnung des Spektrums nicht grundlegend beeinträchtigen, können diese jedoch Einfluss auf die Qualität des Modellspektrums haben. So wurden die Verläufe der Spektren — wie z.B. der Verlauf des Kontinuums und die Form einiger Merkmale des Spektrums sowie die  $H_{\alpha}$ -Linie — zwar qualitativ richtig wiedergegeben, die Form und Stärke anderer Linien aber lediglich angedeutet oder gar nicht reproduziert. Dies kann jedoch auch an der Annahme von schichtunabhängigen Elementhäufigkeiten oder der Verwendung von solaren Häufigkeiten liegen.

In weiterführenden Arbeiten kann versucht werden, die Qualität der Spektren zu verbessern. Dazu müssen von den augenblicklichen Modellen systematische Modellserien gerechnet werden, die die Wahl der Parameter noch weiter einschränken würden. Insbesondere sollten Modelle mit niedrigeren Geschwindigkeiten berechnet werden, da eine erfolgreiche Modellierung mit niedrigen Geschwindigkeiten das Problem der viel zu großen vorhergesagten Eigenbewegung der Supernova lösen könnte. Des Weiteren müssten noch eine Vielzahl von Elementen in das NLTE übernommen werden. In den derzeit besten Modellen werden nur Fe I bis Fe IV sowie H I und He I im NLTE betrachtet.

Des Weiteren müssten die Elementhäufigkeiten systematisch variiert werden, um zu klären, ob eine Änderung der Häufigkeiten eine Verbesserung der Stärke und der Form der Linien bewirkt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Modellierung der Spektren der Supernova SN 2003Z erfolgreich war. Die Effektivtemperatur der Supernova-Atmosphäre konnte auf einen bestimmten Wertebereich eingeschränkt werden. Für das Geschwindigkeitsprofil ist dies nicht gelungen, da die Geschwindigkeitsserie in den Modellen nicht zu genügend kleinen Geschwindigkeiten durchgeführt und keine untere Grenze der Geschwindigkeit festgelegt werden konnte. Die vorhergesagte Eigenbewegung, die aus der großen Expansionsgeschwindigkeit folgt, ist erheblich zu groß, was darauf hindeutet, dass deutlich geringere Geschwindigkeiten in der Modellierung verwendet werden sollten.

Die Modellierung gelang weiterhin nur unter der Annahme eines gegenüber der Literatur größeren Farbexzesses. Diese Annahme scheint jedoch unter Berücksichtigung der Übereinstimmung zwischen Modell und Beobachtung gerechtfertigt zu sein.

Die bisherigen Schwachpunkte der Modelle — die Beschreibung der genauen Form und Stärke der Merkmale des Spektrums — bedeuten nicht, dass Voraussagen über die Effektivtemperaturen nicht möglich sind, da noch zahlreiche Optionen zur Verbesserung dieser Schwachpunkte, vornehmlich eine Häufigkeitsanalyse und eine Betrachtung von mehr Ionen im NLTE, zur Verfügung stehen.





## Anhang A

# Strahlungsenergieimpulstensor

Relativistisch invariante Gleichungen sind Tensorgleichungen. Tensoren lassen sich formal immer als dyadische Produkte aus Vierervektoren beschreiben.

Vierervektoren und somit auch Vierertensoren transformieren sich zwischen Inertialsystemen mittels Lorentztransformationen  $\Lambda^i_j$ :

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_x \gamma & \beta_y \gamma & \beta_z \gamma \\ \beta_x \gamma & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_y}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_x \beta_z}{\beta^2} \\ \beta_y \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_y \beta_z}{\beta^2} \\ \beta_z \gamma & (\gamma - 1) \frac{\beta_z \beta_x}{\beta^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta_z \beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Bei der Beschreibung der Dynamik eines Systems sind die eng mit der Wirkung verknüpften Viererimpulsvektoren der betrachteten Teilchen wichtig.

Bei der Beschreibung eines Strahlungsfeldes sind demnach die Viererimpulsvektoren von Photonen wichtig.

### Der Viererimpulsvektor eines Photons

Der Viererimpulsvektor ist allgemein definiert als:

$$p^\alpha = -\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta S$$

Wobei  $S$  die Wirkung ist. Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, dass:

$$dS = \sum p_i dx_i - H dt$$

Daher ergibt sich im Falle eines Photons mit  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{n}$ :

$$p^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{h\nu}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

Im bewegten System gilt also:

$$p'^\alpha = \frac{h\nu'}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{n}' \end{pmatrix}$$

Wegen des Zusammenhangs (A.1) findet man:

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{n}' = \frac{\nu}{\nu'} \left\{ \vec{n} - \gamma\vec{\beta} \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \vec{\beta} \cdot \vec{n} \right\} \quad (\text{A.3})$$

### Energieimpulstensor des Photonengases

Entsprechend der Definition des Energieimpulstensors [Landau und Lifschitz, 1997] folgt als Definition für den Energieimpulstensor des Photonengases:

$$T^{\alpha\beta} = c^2 \int \frac{f(\vec{x}, \vec{p}, t)}{h\nu} p^\alpha p^\beta d^3\vec{p}$$

Wobei  $p^\alpha$  der Viererimpulsvektor des Photons und  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)d^3\vec{p}$  die Verteilungsfunktion der Photonen im Phasenraum ist. Wegen des Zusammenhangs der Verteilungsfunktion mit der spezifischen Intensität über (3.3) folgt dann:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int d\nu \int d\Omega I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) \frac{c^2}{h^2\nu^2} p^\alpha p^\beta \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{c} \int d\nu \int d\Omega I_\nu(\vec{x}, \vec{n}, t) \begin{pmatrix} 1 & n_x & n_y & n_z \\ n_x & n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y & n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z & n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$= \begin{pmatrix} E & \vec{E}/c \\ \vec{E}/c & P^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Unter der Annahme von sphärischer Symmetrie vereinfachen sich die Konstituenten des Tensors und somit auch der Tensor selber. Es gilt in kartesischen Koordinaten:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} J & 0 & 0 & H \\ 0 & \frac{1}{2}(J-K) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(J-K) & 0 \\ H & 0 & 0 & K \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\equiv \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} J & H & 0 & 0 \\ H & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(J-K) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(J-K) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Bei der Verwendung von Kugelkoordinaten folgt weiterhin:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} J & H & 0 & 0 \\ H & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(J-K)}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{(J-K)}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

## Anhang B

# Invarianten des Strahlungstransports

Bei der Herleitung der relativistischen Strahlungstransportgleichung werden Invarianten des Strahlungsfeldes verwendet. Diese Invarianten sind keine Viererskalare, sondern werden durch klassische Überlegungen abgeleitet.

### Die Invariante der Intensität

Unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters ist die Anzahl der beteiligten Photonen im Strahlungstransport identisch. Daher kann man eine Invariante mit der Anzahl  $N$  der Photonen finden.

$$N_\nu = \frac{I_\nu}{h\nu}$$

$N_\nu$  ist die Anzahl der Photonen im Frequenzintervall  $[\nu, \nu + d\nu]$ . Ein ruhender Beobachter, der die Zahl der Photonen zählt, die durch eine Fläche  $dS$  in einem Zeitintervall  $dt$  treten, erhält als Ergebnis:

$$N_\nu = \frac{I_\nu(\mu)}{h\nu} d\Omega d\nu dt \mu dS$$

Ein entlang der z-Achse des lokalen Koordinatensystems bewegter Beobachter sieht die Fläche  $dS$  sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in negative z-Richtung bewegen. Zusätzlich zu der Propagation von Photonen durch die Fläche scheint die Fläche also noch Photonen aufzusammeln. Ein so bewegter Beobachter erhält als Anzahl:

$$N'_\nu = \frac{I'_{\nu'}(\mu')}{h\nu'} d\Omega' d\nu' dt' \left\{ dS' \mu' + \frac{v}{c} dS' \right\}$$

Die Anzahlen der Photonen sind identisch, da es sich um echte Skalare handelt.<sup>1</sup> Zur weiteren Auswertung greift man auf die Zusammenhänge zwischen den Differentialen zurück. Nimmt man die Bewegung in z-Richtung an, so folgt aus (A.2) und (A.3) mit  $n_z = \mu$ :

$$\nu' n'_z = \nu \left( n_z - \gamma\beta + \underbrace{\beta^2 n_z \frac{\gamma^2}{\gamma+1}}_{n_z(\gamma-1)} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\nu' n'_z = \nu\gamma(\mu - \beta) \quad (\text{B.2})$$

$$\nu' = \nu\gamma(1 - \mu\beta) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d\nu'}{d\nu} = \frac{\nu'}{\nu} \quad (\text{B.4})$$

<sup>1</sup>Es sind Dreierskalare und keine Viererskalare

Hiermit folgt für die Differentiale des Winkelarguments:

$$\mu' = n'_z = \frac{\nu' n'_z}{\nu'} = \frac{\nu \gamma (\mu - \beta)}{\nu \gamma (1 - \mu \beta)} \quad (\text{B.5})$$

$$\mu' = \frac{\mu - \beta}{1 - \mu \beta} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d\mu'}{d\mu} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \mu \beta)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$d\mu' = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 d\mu \quad (\text{B.8})$$

Für das Raumwinkelargument gilt wegen  $d\phi' = d\phi$ :

$$d\Omega' = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 d\Omega \quad (\text{B.9})$$

Somit folgt aus

$$dt' = \gamma dt \quad (\text{B.10})$$

und  $N'_\nu \stackrel{!}{=} N_\nu$  mit (B.4), (B.9):<sup>2</sup>

$$\frac{I_\nu(\mu)}{h\nu} d\Omega d\nu dt \mu dS = \frac{I'_{\nu'}(\mu')}{h\nu'} d\Omega' d\nu' dt' \left\{ dS' \mu' + \frac{v}{c} dS' \right\} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{I_\nu}{\nu} \mu = \frac{I'_{\nu'}}{\nu'} \frac{\nu^2}{\nu'^2} \frac{\nu'}{\nu} \gamma (\mu' + \beta) \quad (\text{B.12})$$

$$\stackrel{\text{B.3 \& B.6}}{\Rightarrow} I_\nu = \frac{\nu^3}{\nu'^3} I'_{\nu'} \quad (\text{B.13})$$

Somit ist die Invariante der Intensität:

$$\frac{I(\mu, \nu)}{\nu^3} = \text{invariant} \quad (\text{B.14})$$

Genaugenommen ist dies die Invariante für den Fall, dass keine Absorption betrachtet wird. Sie ist eine hinreichend gute Näherung für den im allgemeinen zu betrachteten Fall mit Absorption, wenn die betrachteten Prozesse nicht in zu kleinen Volumenelementen ablaufen (siehe Abschnitt (3.7.3)).

<sup>2</sup>Dies ist eine formal richtige Annahme. Siehe dazu Abschnitt (3.7.3).



## Anhang C

# Relativistische Strahlungstransportgleichung

Von der Strahlungstransportgleichung (3.53) gelangt man zu einer relativistischen Beschreibung, indem die Invarianten des Strahlungsfeldes im Ruhesystem durch die entsprechenden Größen im mitbewegten System ausgedrückt werden und alle Ableitungen implizit im mitbewegten System ausgeführt werden (siehe Abschnitt (3.7.4)).

Durch Einsetzen und Ausrechnen folgt:

$$\begin{aligned}
\eta'(\nu') - \chi'(\nu')I'(\nu', \mu') &= \frac{\nu}{\nu'} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial t} + \mu \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial r} + \frac{(1-\mu)^2}{r} \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial \mu} \right] \\
&- 3 \frac{\nu}{\nu'^2} \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \nu'}{\partial t} + \mu \frac{\partial \nu'}{\partial r} + \frac{(1-\mu)^2}{r} \frac{\partial \nu'}{\partial \mu} \right] I'(\nu', \mu') \\
&= \frac{\gamma}{c} (1 + \beta \mu') \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial t} + (\mu' + \beta) \gamma \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial r} \\
&+ 3\gamma \left[ \frac{\beta(1-\mu'^2)}{r} + \frac{\gamma^2}{c} \mu'(1 + \beta \mu') \frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] I'(\nu', \mu') \\
&- \gamma \nu' \left[ \frac{\beta(1-\mu'^2)}{r} + \frac{\gamma^2}{c} \mu'(1 + \beta \mu') \frac{\partial \beta}{\partial t} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial \nu'} \\
&+ \gamma(1-\mu'^2) \left[ \frac{1 + \beta \mu'}{r} - \frac{\gamma^2}{c} (1 + \beta \mu') \frac{\partial \beta}{\partial t} - \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial \mu'}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Diese Gleichung ist noch vollständig zeitabhängig. Unter der Annahme der Zeitunabhängigkeit vereinfacht sich die Gleichung weiter zu:

$$\begin{aligned}
\eta'(\nu') - \chi'(\nu')I'(\nu', \mu') &= (\mu' + \beta) \gamma \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial r} \\
&+ 4\gamma \left[ \frac{\beta(1-\mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] I'(\nu', \mu') \\
&- \gamma \left[ \frac{\beta(1-\mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial (\nu' I'(\nu', \mu'))}{\partial \nu'} \\
&+ \gamma(1-\mu'^2) \left[ \frac{1 + \beta \mu'}{r} - \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial I'(\nu', \mu')}{\partial \mu'}
\end{aligned}$$

(C.2)

Der Darstellung im Frequenzbereich ist die Darstellung im Wellenlängenbereich gleichwertig. Durch die Ersetzung der Größen durch ihre Pendanten im Wellenlängenbereich ändert sich an der Gleichung selber nichts, nur das Argument der Frequenz geht in die Wellenlänge über.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$$

Da die Frequenz jedoch kleiner wird, wenn die Wellenlänge größer wird, ändert sich das Vorzeichen des Terms mit der Ableitung nach der Wellenlänge.

$$\begin{aligned} \eta'(\nu') - \chi'(\nu')I'(\lambda', \mu') &= (\mu' + \beta)\gamma \frac{\partial I'(\lambda', \mu')}{\partial r} \\ &+ 4\gamma \left[ \frac{\beta(1 - \mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] I'(\lambda', \mu') \\ &+ \gamma \left[ \frac{\beta(1 - \mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial(\lambda' I'(\lambda', \mu'))}{\partial \lambda'} \\ &+ \gamma(1 - \mu'^2) \left[ \frac{1 + \beta\mu'}{r} - \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \frac{\partial I'(\lambda', \mu')}{\partial \mu'} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Die Differentiale der Ortsvariablen können in ein Differential des Weegelements  $s$  zusammengefasst werden und durch Einführung von einer Abkürzung vereinfacht sich die Strahlungstransportgleichung weiter zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_\lambda}{\partial s} + a_\lambda \frac{\partial \lambda I_\lambda}{\partial \lambda} + 4a_\lambda I_\lambda &= \eta_\lambda - \chi_\lambda I_\lambda \quad (C.4) \\ \text{mit : } a_\lambda &= \gamma \left[ \frac{\beta(1 - \mu'^2)}{r} + \gamma^2 \mu'(\mu' + \beta) \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] \end{aligned}$$

### Die Momentengleichung der Strahlungstransportgleichung

Um eine frequenzunabhängige Beschreibung des Strahlungstransports zu erhalten, könnte man (3.60) über alle Frequenzen und alle Raumwinkel integrieren. Doch aus der Kenntnis, dass die Dynamik des Energie- und Impulsübertrags und somit auch die Dynamik des beschriebenen Systems selbst durch die verjüngte kovariante Ableitung des Energieimpulsensors bestimmt wird, ist es möglich, die gesuchten Beziehungen zwischen dem Lagrange- und dem Eulersystem zu finden.

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} T^{\alpha\sigma} \quad (C.5)$$

$$= -g^{-\frac{1}{2}} (-g^{-\frac{1}{2}} T^{\alpha\beta})_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} T^{\sigma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta} T^{\alpha\sigma} \quad (C.6)$$

$$= q^\alpha \quad (C.7)$$

Unter der Annahme sphärischer Symmetrie folgt somit nach (C.7):

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2}{r} H \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{1}{r} (3K - J) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

$$= q^\alpha \quad (C.9)$$

Da  $q^\alpha$  ein Vierervektor und  $T^{\alpha\beta}$  ein Vierertensor sind, transformieren sie sich durch Lorentztransformationen (A.1) in verschiedene Inertialsysteme. Durch eine Transformation in das mitbewegte System ergibt sich unter der Annahme von Zeitunabhängigkeit der Zusammenhang:

$$q^0 = \gamma(q'^0 + \beta q'^1) \quad (\text{C.10})$$

$$q^1 = \gamma(q'^1 + \beta q'^0) \quad (\text{C.11})$$

$$T^{00} = \gamma^2(J' + 2\beta H' + \beta^2 K') = J \quad (\text{C.12})$$

$$T^{01} = T^{10} = \gamma^2 \{(1 + \beta^2 H') + \beta(J' + K')\} = H \quad (\text{C.13})$$

$$T^{11} = \gamma^2 \{K' + 2\beta H' + \beta^2 J'\} = K \quad (\text{C.14})$$

$q^\alpha$  beschreibt den Energie und Impulsaustausch zwischen Strahlung und Materie. Die nullte Komponente beschreibt im Ruhesystem den Austausch von Energie, während die räumlichen Komponenten den Austausch von Impuls beschreiben. Im sphärisch symmetrischen Fall existiert nur eine räumliche Richtung von Impulsübertrag, und zwar nach außen. So folgt:

$$q^{0(\prime)} = \frac{1}{c} \int d\lambda^{(\prime)} \oint d\Omega^{(\prime)} [\eta^{(\prime)} - \chi^{(\prime)} I^{(\prime)}] \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{4\pi}{c} \int d\lambda^{(\prime)} [\eta^{(\prime)} - \chi^{(\prime)} J^{(\prime)}] \quad (\text{C.16})$$

$$q^{i(\prime)} = \frac{1}{c} \int d\lambda^{(\prime)} \oint d\Omega^{(\prime)} [\eta^{(\prime)} - \chi^{(\prime)} I^{(\prime)}] n^{i(\prime)} \quad (\text{C.17})$$

$$= -\frac{4\pi}{c} \int d\lambda^{(\prime)} \chi^{(\prime)} H^{(\prime)} \quad (\text{C.18})$$

Die Beziehungen gelten sowohl im Lagrange- als auch im Eulersystem. Über (C.9), (C.16) und (C.18) folgen die Momentengleichungen des Strahlungstransports im Eulersystem.

Für den expandierenden Fall folgen die Momentengleichungen im Lagrangesystem wegen der Transformationseigenschaften (C.10) und (C.11), aus den Momentengleichungen des Eulersystems, wenn alle Größen über (C.12) bis (C.14) durch mitbewegte Größen ausgedrückt werden.

# Literaturverzeichnis

- [APED, ] APED, <http://cxc.harvard.edu/atomdb/>.
- [ASRAS, ] ASRAS,  
<http://www.rochesterastronomy.org/sn2003/index.html2003Z>.
- [Baade und Zwicky, 1934] Baade, W. und Zwicky, F., *On Super-novae, Proceedings of the National Academy of Science* **20**, 254–+ (1934).
- [Barbon *et al.*, 1979] Barbon, R., Ciatti, F., und Rosino, L., *Photometric properties of type II supernovae*, *A&A* **72**, 287–292 (1979).
- [Baron und Hauschildt, 1998] Baron, E. und Hauschildt, P. H., *Parallel Implementation of the PHOENIX Generalized Stellar Atmosphere Program. II. Wavelength Parallelization*, *ApJ* **495**, 370–+ (1998).
- [Baron *et al.*, 2003] Baron, E., Hauschildt, P. H., und Lowenthal, D. (2003), *Parallelization Strategies for ALI Radiative Transfer in Moving Media*, in *ASP Conf. Ser. 288: Stellar Atmosphere Modeling*, pages 385–+.
- [Bethe, 1990] Bethe, H. A., *Supernova mechanisms, Reviews of Modern Physics* **62**, 801–866 (1990).
- [Boehm-Vitense, 1989] Boehm-Vitense, E. (1989), *Introduction to stellar astrophysics. Volume 2 - Stellar atmospheres*, Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1989, 251 p.
- [Boles *et al.*, 2003] Boles, T., Beutler, B., Li, W., Qiu, Y. L., Hu, J. Y., und Schwartz, M. (2003), *Supernovae 2003X, 2003Y, and 2003Z*, in *International Astronomical Union Circular*, pages 1–+.
- [Burbidge *et al.*, 1957] Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., Fowler, W. A., und Hoyle, F., *Synthesis of the Elements in Stars, Reviews of Modern Physics* **29**, 547–650 (1957).
- [Cannon, 1973] Cannon, C. J., *JQSRT* **13**, 627 (1973).
- [Carroll und Ostlie, 1996] Carroll, B. W. und Ostlie, D. A. (1996), *An introduction to modern astrophysics*, Reading, MA: Addison-Wesley, |c1996.
- [Dere *et al.*, 1997] Dere, K. P., Landi, E., Mason, H. E., Monsignori Fossi, B. C., und Young, P. R., *CHIANTI - an atomic database for emission lines, A&AS* **125**, 149–173 (1997).

- [Dere *et al.*, 2001] Dere, K. P., Landi, E., Young, P. R., und Del Zanna, G., *CHIANTI-An Atomic Database for Emission Lines. IV. Extension to X-Ray Wavelengths*, *ApJS* **134**, 331–354 (2001).
- [Doggett und Branch, 1985] Doggett, J. B. und Branch, D., *A comparative study of supernova light curves*, *AJ* **90**, 2303–2311 (1985).
- [Elias *et al.*, 1985] Elias, J. H., Matthews, K., Neugebauer, G., und Persson, S. E., *Type I supernovae in the infrared and their use as distance indicators*, *ApJ* **296**, 379–389 (1985).
- [Filippenko, 1997] Filippenko, A. V., *Optical Spectra of Supernovae*, *ARA&A* **35**, 309–355 (1997).
- [Hauschildt, 1992] Hauschildt, P. H., *A fast operator perturbation method for the solution of the special relativistic equation of radiative transfer in spherical symmetry*, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **47**, 433–453 (1992).
- [Hauschildt, 1993] Hauschildt, P. H., *Multi-level non-LTE radiative transfer in expanding shells*, *JQSRT* **50**, 301–318 (1993).
- [Hauschildt und Baron, 1999] Hauschildt, P. H. und Baron, E., *Numerical solution of the expanding stellar atmosphere problem*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **109**, 41–63 (1999).
- [Hauschildt und Baron, 2004] Hauschildt, P. H. und Baron, E., *Improved discretization of the wavelength derivative term in CMF operator splitting numerical radiative transfer*, *A&A* **417**, 317–324 (2004).
- [Hauschildt *et al.*, 1997] Hauschildt, P. H., Baron, E., und Allard, F., *Parallel Implementation of the PHOENIX Generalized Stellar Atmosphere Program*, *ApJ* **483**, 390–+ (1997).
- [Hauschildt *et al.*, 2001] Hauschildt, P. H., Lowenthal, D. K., und Baron, E., *Parallel Implementation of the PHOENIX Generalized Stellar Atmosphere Program. III. A Parallel Algorithm for Direct Opacity Sampling*, *ApJS* **134**, 323–329 (2001).
- [Hauschildt *et al.*, 1994] Hauschildt, P. H., Strözer, H., und Baron, E., *Convergence properties of the accelerated  $\Lambda$ -iteration method for the solution of radiative transfer problems*, *JQSRT* **51**, 875–891 (1994).
- [KAIT,] KAIT, <http://astron.berkeley.edu/~bait/kait.html>.
- [Kurucz, 2002] Kurucz, R. L. (2002), *Atomic and Molecular Data Needs for Astrophysics*, in *AIP Conf. Proc. 636: Atomic and Molecular Data and Their Applications*, pages 134–143.
- [Landau und Lifschitz, 1987] Landau, L. und Lifschitz, E. (1987), *Lehrbuch der theoretischen Physik*, in *Teil 5, Statistische Physik, Teil I*, Akademie Verlag Berlin, achte edition.
- [Landau und Lifschitz, 1997] Landau, L. und Lifschitz, E. (1997), *Lehrbuch der theoretischen Physik*, in *Teil 2, Klassische Feldtheorie*, Harry Deutsch, zwölfte edition.

- [Liebendörfer *et al.*, 2004] Liebendörfer, M., Messer, O. E. B., Mezzacappa, A., Bruenn, S. W., Cardall, C. Y., und Thielemann, F.-K., *A Finite Difference Representation of Neutrino Radiation Hydrodynamics in Spherically Symmetric General Relativistic Spacetime*, *ApJS* **150**, 263–316 (2004).
- [Matheson *et al.*, 2003] Matheson, T., Challis, P., Kirshner, R., und Calkins, M. (2003), *Supernovae 2003Y and 2003Z*, in *International Astronomical Union Circular*, pages 2–+.
- [Mihalas, 1970] Mihalas, D. (1970), *Stellar atmospheres*, Series of Books in Astronomy and Astrophysics, San Francisco: Freeman, |c1970.
- [Mihalas, 1978] Mihalas, D. (1978), *Stellar atmospheres /2nd edition/*, San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1978. 650 p.
- [Mihalas, 1980] Mihalas, D., *Solution of the comoving-frame equation of transfer in spherically symmetric flows. VI - Relativistic flows*, *ApJ* **237**, 574–589 (1980).
- [Mihalas und Weibel Mihalas, 1984] Mihalas, D. und Weibel Mihalas, B. (1984), *Foundations of radiation hydrodynamics*, New York: Oxford University Press, 1984.
- [Minkowski, 1939] Minkowski, R., *The Spectra of the Supernovae in IC 4182 and in NGC 1003.*, *ApJ* **89**, 156–+ (1939).
- [Minkowski, 1941] Minkowski, R., *Spectra of Supernovae*, *PASP* **53**, 224–+ (1941).
- [Misner *et al.*, 1973] Misner, C. W., Thorne, K. S., und Wheeler, J. A. (1973), *Gravitation*, San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973.
- [Olson und Kunasz, 1987] Olson, G. und Kunasz, P., , *JQSRT* **38**, 325 (1987).
- [Olson *et al.*, 1986] Olson, G. L., Auer, L. H., und Buchler, J. R., *A rapidly convergent iterative solution of the non-LTE line radiation transfer problem*, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **35**, 431–442 (1986).
- [Oxenius, 1986] Oxenius, J. (1986), *Kinetic theory of particles and photons. theoretical foundations of Non-LTE plasma spectroscopy*, Springer Series in Electrophysics, Berlin: Springer, 1986.
- [Petschek, 1990] Petschek, A. G. (1990), *Supernovae*, *Supernovae*, XIII, 293 pp. 111 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library.
- [Schlegel *et al.*, 1998] Schlegel, D. J., Finkbeiner, D. P., und Davis, M., *Maps of Dust Infrared Emission for Use in Estimation of Reddening and Cosmic Microwave Background Radiation Foregrounds*, *ApJ* **500**, 525–+ (1998).
- [Schlegel, 1996] Schlegel, E. M., *On the Early Spectroscopic Distinction of Type II Supernovae*, *AJ* **111**, 1660–+ (1996).
- [van Kampen, 1969] van Kampen, N., *Lorentz-invariance of the distribution in phase space*, *Physica* **43**, 244–262 (1969).

- 
- [Weigert und Wendker, 1982] Weigert, A. und Wendker, H. J. (1982), *Astronomie und Astrophysik, ein Grundkurs*, Weinheim: Physik-Verlag, 1982.
- [Wheeler und Harkness, 1986] Wheeler, J. C. und Harkness, R. P. (1986), Physical models of supernovae and the distance scale, in *NATO ASIC Proc. 180: Galaxy Distances and Deviations from Universal Expansion*, pages 45–54.
- [Woosley *et al.*, 1990] Woosley, S. E., Hartmann, D. H., Hoffman, R. D., und Haxton, W. C., *The nu-process*, *ApJ* **356**, 272–301 (1990).
- [Woosley *et al.*, 1994] Woosley, S. E., Wilson, J. R., Mathews, G. J., Hoffman, R. D., und Meyer, B. S., *The r-process and neutrino-heated supernova ejecta*, *ApJ* **433**, 229–246 (1994).
- [Young und Branch, 1989] Young, T. R. und Branch, D., *Absolute light curves of type II supernovae*, *ApJ* **342**, L79–L82 (1989).
- [Zel'Dovich und Raizer, 1967] Zel'Dovich, Y. B. und Raizer, Y. P. (1967), *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, New York: Academic Press, 1966/1967, edited by Hayes, W.D.; Probstein, Ronald F.
- [Zwicky, 1938] Zwicky, F., *On the Search for Supernovae*, *PASP* **50**, 215–+ (1938).
- [Zwicky, 1940] Zwicky, F., *Types of Novae*, *Reviews of Modern Physics* **12**, 66–+ (1940).
- [Zwicky, 1964] Zwicky, F., *NGC 1058 and its Supernova 1961.*, *ApJ* **139**, 514–+ (1964).





# Danksagung

Ich danke meinen Eltern dafür, dass sie mir ein unbesorgtes Studium ermöglicht und mich in vielen anderen Angelegenheiten großzügig unterstützt haben. Ohne ihre Hilfe wäre mein Studium nicht dergestalt abgelaufen, wie es ist.

Weiterhin danke ich Mareike dafür, dass sie da ist.

Prof. Peter Hauschildt danke ich für die großartige Betreuung und die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe. Es ist eine große Ehre, dem »Orden des PHOENIX« anzugehören.<sup>1</sup>

Prof. J. Schmitt danke ich für seine Bereitschaft, diese Arbeit zu korrigieren.

Andreas Schweitzer danke ich für die engelsgleiche Geduld bei der Lösung meiner Probleme, die mit Computern zu tun hatten und seinen bedingungslosen Einsatz für die Funktionalität der gesamten Arbeitsgruppe.

Alexander Petz danke ich für seine ungezählten Hilfestellung zum Verständnis von PHOENIX sowie für sein akribisches Korrekturlesen .

Matthias Dehn danke ich für seine aufmunternden Worte, die Piktogramme des Zuspruchs und die Orangenstücke. Und ja, alles ist gut!

Birgit Fuhrmeister danke ich für die morgentlichen Telefongespräche und ihre hervorragenden Dienste beim Korrekturlesen.

Ines Brott danke ich für das Chili, die Kekse und ihre gute Laune.

Eddie Baron danke ich für seine nützlichen Antworten auf meine Fragen.

Stefan Dreizler danke ich für seine bereitwilligen Auskünfte und die Spektren.

Ich danke NERSC und dem HLRN für die jeweils großzügige Vergabe von Rechenzeit, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Schließlich gebührt noch Feruccio Renzoni Dank, der mit seinen großartigen, unübertroffenen Motivationskünsten mich zum Abschluss meines Studiums gedrängt hat:

Oh no, don't do that. Don't use the vector product. Look  
it's simple, take the total antisymmetric tensor of  
unity, use it's properties and that's it ...

Ah, you are so stupid you will never pass the exam ...

---

<sup>1</sup>Ähnlichkeiten mit Inhalten fiktiver Geschichten aus der Feder von J. K. Rowling sind zufällig und unbeabsichtigt.



# Erklärung

Hiermit erkläre ich, Sebastian Knop, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

\_\_\_\_\_  
Unterschrift

Hamburg, den 18.05. 2004

Hiermit stimme ich, Sebastian Knop, einer späteren Ausleihe dieser Arbeit in der Fachbereichsbibliothek zu.

\_\_\_\_\_  
Unterschrift

Hamburg, den 18.05. 2004