Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 30 — Homogenität der Green-Funktion
Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t,t') = G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t') \ ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Aufgabe 31 — $1/\omega$-Entwicklung
Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle c_\alpha; c_\beta^\dagger \rangle\rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta}(U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta})\langle c_\gamma^\dagger c_\delta\rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ !$$

Aufgabe 32 — Funkionalintegraldarstellung der Zustandssumme
a) Zeigen Sie für die Zustandssumme eines Bosesystems, dass

$$Z = \mathsf{Sp}\, e^{-\beta\mathcal{H}} = \lim_{M\to\infty} \mathsf{Sp}\,((\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M) \qquad (\varepsilon = \beta/M)$$

wobei $\mathcal{T}$ der Zeitordnungsoperator ist. Für Operatoren ohne Zeitabhängigkeit ordnet $\mathcal{T}$ Erzeuger stets links von Vernichtern an: $\mathcal{T}(c_\alpha c_\beta^\dagger) = +c_\beta^\dagger c_\alpha$ (Bosonen).

b) Zeigen Sie jetzt, dass

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} \langle \varphi_1, ..., \varphi_d | (\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M | \varphi_1, ..., \varphi_d\rangle$$

bzw. nach trivialer Ergänzung des Index M:

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,M} dy_{\alpha,M}}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_{\alpha,M}^* \varphi_{\alpha,M}} \langle \varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M} | (\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M | \varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M}\rangle$$

c) Schreiben Sie die Potenz aus, und fügen Sie $M-1$-mal die $\mathbf{1}$ ein,

$$(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M = \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdots \mathbf{1} \cdot \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \ ,$$

wobei die r-te Eins ($r = 1, ..., M-1$) durch kohärente Zustande $|\varphi_{1r}, ..., \varphi_{dr}\rangle$ dargestellt wird! Zeigen Sie damit, dass

$$\begin{aligned} Z \ = \ & \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{r=1}^{M}\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r} dy_{\alpha,r}}{\pi}\right) \times \\ & \left(\prod_{r=1}^{M} e^{-\sum_\alpha \varphi_{\alpha,r}^* \varphi_{\alpha,r}} \langle \varphi_{1,r}, ..., \varphi_{d,r} | (\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}}) | \varphi_{1,r-1}, ..., \varphi_{d,r-1}\rangle\right) \ , \end{aligned}$$

wobei $\varphi_{\alpha,0} \equiv \varphi_{\alpha,M}$ definiert wird ("periodische Randbedingungen")!

d) Der Hamilton-Operator sei wie üblich durch

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha\beta} (t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta}) c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\gamma c_\delta$$

gegeben, also eine Funktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{c_\alpha^\dagger, c_\alpha\})$ aller Erzeuger und Vernichter. Zeigen Sie, dass

$$\langle \varphi_{1,r}, ..., \varphi_{d,r} | (\mathcal{T} e^{-\varepsilon \mathcal{H}(\{c_\alpha^\dagger, c_\alpha\})}) | \varphi_{1,r-1}, ..., \varphi_{d,r-1} \rangle = e^{-\varepsilon \mathcal{H}(\{\varphi_{\alpha,r}^*, \varphi_{\alpha,r-1}\})} e^{\sum_\alpha \varphi_{\alpha,r}^* \varphi_{\alpha,r-1}}$$

unter Benutzung der Formel für das Skalarprodukt kohärenter Zustände!

e) Beweisen Sie jetzt:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{r=1}^{M} \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r} dy_{\alpha,r}}{\pi} \right) \times \\ & \exp\left(-\sum_r \sum_\alpha \varphi_{\alpha,r}^* (\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}) - \varepsilon \sum_r \mathcal{H}(\{\varphi_{\alpha,r}^*, \varphi_{\alpha,r-1}\}) \right) \end{aligned}$$

f) Führen Sie (im Limes $M \to \infty$) die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \tau_r &= \varepsilon r = \frac{\beta}{M} r \\ \varphi_\alpha(\tau_r) &= \varphi_{\alpha,r} \\ \frac{\partial}{\partial\tau} \varphi_\alpha(\tau_r) &= \frac{\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}}{\varepsilon} \\ D[\varphi_\alpha^*(\tau), \varphi_\alpha(\tau)] &= \prod_{r=1}^{M} \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r} dy_{\alpha,r}}{\pi} \end{aligned}$$

und zeigen Sie damit die Funktionalintegraldarstellung von Z:

$$Z = \int D[\varphi_\alpha^*(\tau), \varphi_\alpha(\tau)] e^{-S(\{\varphi_\alpha^*(\tau), \varphi_\alpha(\tau)\})}$$

mit der Wirkung

$$S = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_\alpha \varphi_\alpha^*(\tau) (\partial/\partial\tau) \varphi_\alpha(\tau) + \mathcal{H}(\{\varphi_\alpha^*(\tau), \varphi_\alpha(\tau)\}) \right)$$