Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 26 — Wick-Theorem
Betrachten Sie ein System von Spin-$1/2$-Fermionen. Die Ein-Teilchen-ONB ist $\{|\alpha\rangle\} = \{|i\sigma\rangle\}$. Berechnen Sie für $i \neq j$ die freien Erwartungswerte

$$\langle n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow} n_{j\uparrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow} n_{j\downarrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\sigma} n_{j\sigma'} n_{j\sigma''}\rangle^{(0)}$$

mit Hilfe des Wick-Theorems! Nehmen Sie dabei an, dass die Gesamtteilchenzahl und der Gesamtspin erhalten sind ($[\hat{N}, H_0]_- = 0$, $[S_z, H_0]_- = 0$)!

Aufgabe 27 — Kohärente Zustände
Gegeben ist ein System von Bosonen. Ein kohärenter Zustand $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^{(+)}$ ist ein gemeinsamer Eigenzustand aller Vernichter c_α:

$$c_\alpha |\varphi\rangle = \varphi_\alpha |\varphi\rangle$$

für $\alpha = 1, ..., d$ ($d = \dim \mathcal{H}_1$). Er kann daher durch die Eigenwerte $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$ charakterisiert werden.

a) Die Eigenwerte φ_α seien für $\alpha = 1, ..., d$ gegeben. Bestimmen Sie den zugehörigen kohärenten Zustand

$$|\varphi\rangle = \sum_{n_1,...,n_d} \varphi_{n_1,...,n_d} |n_1, ..., n_d\rangle^{(+)} \, ,$$

indem Sie die Koeffizienten $\varphi_{n_1,...,n_d}$ berechnen!
(Hinweis 1: Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung eine Gleichung für die Koeffizienten ab! Hinweis 2: Durch wiederholtes Anwenden von c_α erhält man letztlich den Vakuumzustand).

b) Normieren Sie den kohärenten Zustand!

c) Gibt es kohärente Zustände auch für Fermionen?

Aufgabe 28 — Kohärente Zustände – 2
Für beliebige $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathbb{C}$ sei durch

$$|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle = \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{d} \varphi_\alpha c_\alpha^\dagger\right) |0\rangle$$

ein Zustand definiert. d ist die Dimension des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums, $|0\rangle$ ist der Vakuumzustand. Betrachtet werde ein bosonisches System.

a) Zeigen Sie:

$$
\begin{aligned}
c_\alpha|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle &= \varphi_\alpha|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle \\
\langle\varphi_1,...,\varphi_d|c_\alpha^\dagger &= \langle\varphi_1,...,\varphi_d|\varphi_\alpha^* \\
c_\alpha^\dagger|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle &= \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle \\
\langle\varphi_1,...,\varphi_d|c_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^*}\langle\varphi_1,...,\varphi_d|
\end{aligned}
$$

b) Berechnen Sie:

$$\langle\varphi_1,...,\varphi_d|\varphi_1',...,\varphi_d'\rangle$$

c) Beweisen Sie:

$$\int\left(\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right)e^{-\sum_\alpha\varphi_\alpha^*\varphi_\alpha}|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle\langle\varphi_1,...,\varphi_d| = \mathbf{1}$$

wobei $\varphi_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ mit $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$, und die Integrale jeweils von $-\infty$ bis ∞ laufen!

Aufgabe 29 — Auswertung der Spur mit kohärenten Zuständen

Gegeben ist ein System von Bosonen. A sei ein beliebiger Operator und $|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle$ ein kohärenter Zustand, $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie ($\varphi_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$):

$$\mathrm{Sp}\,A = \int\left(\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right)e^{-\sum_\alpha\varphi_\alpha^*\varphi_\alpha}\langle\varphi_1,...,\varphi_d|A|\varphi_1,...,\varphi_d\rangle \quad !$$