Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 22 — Gittertranslationen
Durch

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \boldsymbol{k}\, c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma}$$

sei der Operator des Gesamt-Gitter-Impulses definiert. Weiter sei

$$U(\boldsymbol{R}_0) \equiv U_0 = e^{i\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0}$$

wobei $\boldsymbol{R}_0$ ein beliebiger Gittervektor ist: $\boldsymbol{R}_0 = \sum_{s=1}^{D} n_s \boldsymbol{a}_s$.

a) Zeigen Sie, dass U_0 unitär ist!

b) Zeigen Sie, dass $U(\boldsymbol{R}_0)U(\boldsymbol{R}_1) = U(\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_1)$!

c) Nehmen Sie an, dass

$$L_{\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0} c_{i\sigma} = [c_{i\sigma}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{R}_0] = \sum_j M_{ij} c_{j\sigma}$$

mit einer Matrix M und zeigen Sie, dass dann

$$U_0 c_{i\sigma} U_0^\dagger = \sum_j \left(e^{-iM}\right)_{ij} c_{j\sigma} \;!$$

d) Zeigen Sie, dass M durch

$$M_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)} \boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_0$$

gegeben ist! Verwenden Sie dazu die Fourier-Transformation in der Form

$$c_{i\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_i} c_{\boldsymbol{k}\sigma} \;!$$

e) Schreiben Sie $M = SmS^\dagger$ mit einer unitären Matrix S und einer Diagonalmatrix m, und geben Sie S und m explizit an!

f) Nutzen Sie die Beziehung

$$e^{-iM} = Se^{-im}S^\dagger$$

und jetzt zu zeigen, dass

$$U_0 c_{i\sigma} U_0^\dagger = c_{i-i_0\sigma} \;!$$

g) Unter welchen Umständen gilt

$$[U_0, H] = 0$$

für das Hubbard-Modell?

h) Zeigen Sie, dass dann auch

$$[\boldsymbol{P}, H] = 0$$

gilt!

Aufgabe 23 — Hermitescher Hamilton-Operator
Gegeben ist der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\gamma c_\delta \ .$$

Was folgt für die (i.allg. komplexen) Matrixelemente $t_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ aus der Forderung nach Hermitizität: $H = H^\dagger$? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

Aufgabe 24 — Vakuumfluktuationen
Geben Sie einen Operator (in zweiter Quantisierung) an, dessen Vakuumerwartungswert verschwindet ($\langle A \rangle_v = \langle 0|A|0\rangle = 0$), der aber eine endliche Fluktuation

$$\langle (A - \langle A \rangle_v)^2 \rangle_v > 0$$

im Vakuumzustand aufweist!

Aufgabe 25 — Teilchen identisch mit Loch
$\{|\alpha\rangle\}$ sei eine Ein-Teilchen-ONB. Wie muss man Erzeuger und Vernichter $\gamma_\alpha^\dagger$ bzw. γ_α definieren, so dass die folgenden Eigenschaften gelten?

$$\begin{aligned} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta^\dagger]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \\ \gamma_\alpha^\dagger &= \gamma_\alpha \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Umständen $\gamma_\alpha^2 = 1/2$!

Es sei $\alpha = (i, \sigma)$. Kann man sinnvollerweise einen lokalen Spin $S_{i,r} = (1/2) \sum_{\sigma\sigma'} \gamma_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'}^{(r)} \gamma_{i\sigma'}$ definieren ($r = x, y, z$)?