Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 16 — Ein-Magnon-Zustand
Es sei $|F\rangle = |S, S, ...\rangle$ der vollständig polarisierte ferromagnetische Grundzustand des Heisenberg-Modells $H = -J\sum_{ij}^{n.N.} \boldsymbol{S}_i\boldsymbol{S}_j - B\sum_i S_{iz}$ für $J > 0$ und

$$|\boldsymbol{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SL}} S_-(\boldsymbol{k})|F\rangle$$

der Ein-Magnon-Zustand mit Wellenvektor $\boldsymbol{k}$. Benutzen Sie die Definition

$$S_\mu(\boldsymbol{k}) = \sum_{i=1}^{L} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}_i} S_{i\mu}\ , \qquad (\mu = +, -, z)$$

die Kommutatorrelationen

$$[S_z(\boldsymbol{k}), S_\pm(\boldsymbol{k}')]_- = \pm S_\pm(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \qquad [S_+(\boldsymbol{k}), S_-(\boldsymbol{k}')]_- = 2S_z(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')$$

um zu zeigen, dass $|\boldsymbol{k}\rangle$ ein Eigenzustand von

$$H = -\frac{1}{L}\sum_{\boldsymbol{k}} J(\boldsymbol{k})(S_+(\boldsymbol{k})S_-(-\boldsymbol{k}) + S_z(\boldsymbol{k})S_z(-\boldsymbol{k})) - BS_z(0)$$

ist!

Aufgabe 17 — Holstein-Primakoff-Transformation
Betrachten Sie die Holstein-Primakoff-Transformation, d.h. die folgende Darstellung für den lokalen Spin-Operator $\boldsymbol{S}_i$ durch Bosonen mit $[b_i, b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}$ ("Magnonen"):

$$\begin{aligned} S_{iz} &= S - b_i^\dagger b_i \\ S_{i+} &= \sqrt{2S}\,\sqrt{1 - b_i^\dagger b_i/(2S)}\; b_i \\ S_{i-} &= b_i^\dagger\,\sqrt{1 - b_i^\dagger b_i/(2S)}\,\sqrt{2S}\ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Drehimpulsalgebra!
b) Zeigen Sie: $\boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1)$
c) Transformieren Sie für $T \to 0$ das Heisenberg-Modell auf ein Magnonengas!

Aufgabe 18 — Blochsches $T^{3/2}$-Gesetz
Berechnen Sie die Temperaturabhängigkeit des magnetischen Moments $m = \langle S_{iz}\rangle$ in der linearen Spinwellennäherung, d.h. für das durch $H = E_0 + \sum_{\boldsymbol{k}} \omega(\boldsymbol{k}) b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}}$ gegebene Magnonen-Gas, und diskutieren Sie den Limes $T \to 0$!

Aufgabe 19 — Singulärwertzerlegung

Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$. Zeigen Sie, dass unitäre $m \times m$- und $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{U}$ bzw. $\boldsymbol{V}$ existieren mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^\dagger \ ,$$

wobei $\boldsymbol{D}$ eine $m \times n$-Matrix ist mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$!

Hinweise: Definieren Sie $\rho = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$. Welche Matrixdimensionen hat ρ? Ist ρ hermitesch und positiv definit? Bestimmen Sie zunächst $\boldsymbol{U}$ durch Diagonalisierung von ρ und dann $\boldsymbol{V}$ so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^\dagger$! Nehmen Sie zunächst an, dass verschwindende Eigenwerte nicht vorkommen!