Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 8 — Doppelbesetzung
Zeigen Sie für Spin-1/2-Fermionen ($\varepsilon = -1$), dass

$$0 \leq \langle d_i \rangle \leq 1$$

wobei $d_i = \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}$ die Doppelbesetzung bezeichnet.

Aufgabe 9 — lokaler Spin
Für ein Gittermodell sei die Orthonormalbasis des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums durch $\{|i\sigma\rangle\}$ gegeben, wobei i die Plätze eines Gitters indiziert und $\sigma =\uparrow, \downarrow$.
a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $\boldsymbol{S}_{i\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} c^\dagger_{i\sigma}\sigma^{(\mu)}_{\sigma\sigma'}c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = iS_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}_i^2$!

Aufgabe 10 — Teilchenzahlerhaltung
Zeigen Sie, dass die (Gesamt-)Teilchenzahl für einen allgemeinen Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\delta c_\gamma$$

mit beliebigen Matrixelementen $t_{\alpha\beta}$ und $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ eine Erhaltungsgröße ist!

Aufgabe 11 — Coulomb-Wechselwirkung im reziproken Raum
Gegeben ist der folgende Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij}c^\dagger_{i\sigma}c_{j\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{ijkl}\sum_{\sigma\sigma'} U_{ijkl}c^\dagger_{i\sigma}c^\dagger_{j\sigma'}c_{l\sigma'}c_{k\sigma}$$

mit

$$t_{ij} = \langle i\sigma|H_1|j\sigma\rangle \qquad U_{ijkl} = \langle i\sigma, j\sigma'|H_2|k\sigma, l\sigma'\rangle$$

wobei i die Plätze eines Gitters bezeichnet.

Führen Sie die Fourier-Transformation in den reziproken Raum durch, und geben Sie den Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung bezüglich der ONB $\{|\boldsymbol{k}\sigma\rangle\}$ an! Welche Vereinfachungen ergeben sich durch die Translationsinvarianz?

Leiten Sie die Form der Wechselwirkungsparameter im $\boldsymbol{k}$-Raum her für den Spezialfall

$$U_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il}U \ ,$$

also für eine rein lokale Wechselwirkung!

Aufgabe 12 — Zeitabhängiger Vernichter
Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta \, .$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?

Aufgabe 13 — Trotter-Zerlegung
Zeigen Sie die Gültigkeit der Trotter-Zerlegung

$$\exp(x(A+B)) = \exp(xA)\exp(xB) + \mathcal{O}(x^2)$$

für beliebige lineare Operatoren A und B! x ist eine reelle Zahl.