Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 28 — Zwei-Teilchen-Green-Funktion
Berechnen Sie für ein System nicht-wechselwirkender spinloser Fermionen auf einem Gitter,

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \epsilon(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} c_{\boldsymbol{k}\sigma} \ ,$$

mithilfe der Zwei-Teilchen-Green-Funktion (Kommutator-Green-Funktion!)

$$G_{iiii}(\omega) = \langle\langle c_{i\sigma} c_{i-\sigma} ; c^\dagger_{i-\sigma} c^\dagger_{i\sigma} \rangle\rangle_\omega$$

die zugehörige Spektraldichte $A_{iiii}(\omega)$! Drücken Sie die Spektraldichte als Funktional der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{ii}(\omega) = -(1/\pi)\mathrm{Im}\langle\langle c_{i\sigma}; c^\dagger_{i\sigma}\rangle\rangle^{(\mathrm{ret})}_\omega$ aus!

Aufgabe 29 — $1/\omega$-Entwicklung
Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle c_\alpha ; c^\dagger_\beta \rangle\rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta}(U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta})\langle c^\dagger_\gamma c_\delta\rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\delta c_\gamma \ !$$

Aufgabe 30 — Retardierte Selbstenergie
Sei $\boldsymbol{A}$ eine komplexe Matrix. Definiere $\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\dagger)/2$ und $\boldsymbol{A}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\dagger)/2i$, dann ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + i\boldsymbol{A}_2$ mit $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ hermitesch. Sei $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}_1 + i\boldsymbol{B}_2$ mit $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ hermitesch. Zeigen Sie: Aus $\boldsymbol{A}_2$ negativ definit folgt $\boldsymbol{B}_2$ negativ definit!

Zeigen Sie damit, dass der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie negativ definit ist!

Aufgabe 31 — Innere Energie
Zeigen Sie, dass die innere Energie $U = \langle H \rangle$ eines Systems von identischen Fermionen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\delta c_\gamma \ ,$$

mithilfe der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{\alpha\beta}(\omega) = (-1/\pi)\text{Im}G_{\alpha\beta}(\omega + i0^+)$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\omega \, f(\omega)[(\omega + \mu)\delta_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}]A_{\beta\alpha}(\omega)$$

ausgedrückt werden kann! Nutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $G_{\alpha\beta}(\omega)$, das Spektraltheorem und die Symmetrie $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\beta\alpha\delta\gamma}$ aus! $f(\omega) = 1/(e^{\omega/T} + 1)$ ist die Fermi-Funktion. Was ändert sich im Falle von Bosonen?