Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 21 — Schwinger-Bosonen

a und b seinen bosonische Vernichter ("Schwinger-Bosonen"). Zeigen Sie, dass durch

$$S_+ = a^\dagger b \ , \quad S_- = b^\dagger a \ , \quad S_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$$

ein Spin definiert wird!

Weiter werde definiert:

$$|S, M\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^{S+M}}{\sqrt{(S+M)!}} \frac{\left(b^\dagger\right)^{S-M}}{\sqrt{(S-M)!}} |0\rangle$$

wobei $|0\rangle$ das Vakuum der Schwinger-Bosonen ist. Zeigen Sie, dass der Zustand $|S, M\rangle$ gemeinsamer Eigenzustand zu $\boldsymbol{S}^2$ und S_z mit Quantenzahlen S, M ist!

Welcher Unterraum des Schwinger-Bosonen-Fock-Raums ist der Hilbert-Raum eines Spins mit fester Quantenzahl S?

Aufgabe 22 — Bogoliubov-Transformation

Für ein System von Fermionen ist der Hamilton-Operator

$$H = \omega_1 c_1^\dagger c_1 - \omega_2 c_2 c_2^\dagger + \rho(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1) = (c_1^\dagger, c_2) \begin{pmatrix} \omega_1 & \rho \\ \rho & -\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

gegeben. Führen Sie neue fermionische Erzeuger und Vernichter ein, und bringen Sie H mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^\dagger \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

(S: 2×2-Matrix) auf die Form:

$$H = \eta_1 d_1^\dagger d_1 + \eta_2 d_2 d_2^\dagger \ !$$

Bestimmen Sie η_1, η_2! Vergleichen Sie mit dem in der Vorlesung abgeleiteten Resultat! Gelingt diese Idee auch für Bosonen?

Aufgabe 23 — Trotter-Zerlegung

Zeigen Sie die Gültigkeit der Trotter-Zerlegung

$$\exp((A+B)/m) = \exp(A/m)\exp(B/m) + \mathcal{O}(1/m^2)$$

für beliebige lineare Operatoren A und B! (Anleitung: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $F(x) = e^{xA}e^{-x(A+B)}e^{xB}$!)

Aufgabe 24 — Ω konkav

Es sei $H = H_0 + \lambda A$ mit H_0 und A hermitesch aber sonst beliebig. Es gilt mit $\beta = 1/T, A(\tau) = e^{\mathcal{H}\tau}Ae^{-\mathcal{H}\tau}, \mathcal{H} = H - \mu\hat{N}, \Omega = -T \ln \mathrm{Sp}\, e^{-\beta\mathcal{H}}$:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} = \beta\langle A\rangle^2 - \int_0^\beta d\tau\langle A(\tau)A(0)\rangle = \frac{\partial\langle A\rangle}{\partial\lambda} \qquad \text{(s. Vorlesung)}$$

Zeigen Sie damit, dass $\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2} \leq 0$!

Anleitung: 1) Definieren Sie $(A,B) = \beta^{-1}\int_0^\beta d\tau\langle B(0)A(\tau)^\dagger\rangle$! 2) Zeigen Sie: $(\cdot,\cdot)$ ist ein Skalarprodukt! 3) Werten Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $A = 1$ aus!

Aufgabe 25 — Homogenität der Green-Funktion

Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t,t') = G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t')\ ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!