Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 14 — Atomarer Limes

Gegeben ist das Hubbard-Modell im atomaren Limes,

$$H = \epsilon_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} \hat{n}_{i-\sigma} \ .$$

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potenzial!

Welche Werte nimmt die Entropie (abhängig von den Modellparametern) in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ an?

Aufgabe 15 — lokaler Spin

a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $\boldsymbol{S}_{i\mu} = \dfrac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} c^{\dagger}_{i\sigma} \sigma^{(\mu)}_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_{-} = iS_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}_i^2$!

Aufgabe 16 — $SU(2)$-Invarianz

Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{a}\boldsymbol{S})$$

beschrieben wird ($\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \boldsymbol{S}]_{-}$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu}]_{-} = \frac{1}{2} \sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ ($\mu = x, z, y$) sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Aufgabe 17 — Zwei-Platz-Hubbard-Modell
Gegeben ist das Hubbard-Modell für $L = 2$ Plätze:

$$H = \epsilon_0 \sum_\sigma (n_{1\sigma} + n_{2\sigma}) + t \sum_\sigma (c^\dagger_{1\sigma} c_{2\sigma} + c^\dagger_{2\sigma} c_{1\sigma}) + U n_{1\sigma} n_{1-\sigma} + U n_{2\sigma} n_{2-\sigma} \; .$$

a) Konstruieren Sie die zu H gehörige Matrix in der Besetzungszahldarstellung! Nutzen Sie dabei aus, dass H blockdiagonal bezüglich der Teilchenzahl ist!

b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie E_0 für $N = 2$ Elektronen! Überprüfen Sie die Grenzfälle $U = 0$ und $t = 0$!

c) Entwickeln Sie die Grundzustandsenergie $E_0 = E_0(U)$ in $1/U$ und vergleichen Sie das Resultat in führender Ordnung in $1/U$ mit der Grundzustandsenergie des entsprechenden Zwei-Spin-Heisenberg-Modells!

d) Berechnen Sie jetzt sämtliche Eigenwerte von $\mathcal{H} = H - \mu \hat{N}$ und bestimmen Sie – in Abhängigkeit von μ – die Grundzustandsenergie von $\mathcal{H}$ und die jeweilige Teilchenzahl N.

e) Es sei $\mu = \epsilon_0 + U/2$. Bestimmen Sie die niedrigste Anregungsenergie von $\mathcal{H}$ und vergleichen Sie mit der niedrigsten Anregungsenergie des Zwei-Spin-Heisenberg-Modells für $U \to \infty$!

f) Welche niedrigste Anregung ergibt sich für $\mu = 0$?