Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 35 — Innere Energie
Zeigen Sie, dass die innere Energie $U = \langle H \rangle$ eines Systems von identischen Fermionen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ ,$$

mithilfe der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{\alpha\beta}(\omega) = (-1/\pi)\mathrm{Im}G_{\alpha\beta}(\omega + i0^+)$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\omega\ f(\omega)[(\omega+\mu)\delta_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}]A_{\beta\alpha}(\omega)$$

ausgedrückt werden kann! Nutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $G_{\alpha\beta}(\omega)$, das Spektraltheorem und die Symmetrie $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\beta\alpha\delta\gamma}$ aus! $f(\omega) = 1/(e^{\omega/T}+1)$ ist die Fermi-Funktion. Was ändert sich im Falle von Bosonen?

Aufgabe 36 — Matsubara-Frequenzen
Zeigen Sie, dass die Fermi-Funktion / Bose-Funktion

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon}$$

für komplexe Frequenzen eine analytische Funktion ist bis auf Polstellen erster Ordnung an den fermionischen / bosonischen Matsubara-Frequenzen! Bestimmen Sie die Residuen!

Aufgabe 37 — Matsubara-Summen
Es sei $F(\omega)$ eine analytische Funktion bis auf Pole erster Ordnung auf der reellen ω-Achse. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\beta} \sum_n F(i\omega_n) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon} F(\omega) \ ,$$

wobei C ein Weg ist, der jede Matsubara-Frequenz gegen den Uhrzeigersinn genau einmal umläuft.

Aufgabe 38 — Ein-Teilchen-Korrelationsfunktion
Begründen Sie, dass die Matsubara-Summe

$$\frac{1}{\beta} \sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n)$$

für endliches (aber infinitesimales) 0^+ wohldefniert ist, und berechnen Sie die Summe durch Integration in der komplexen Ebene (s.o.) mit anschließender geeigneter Deformation des Integrationswegs, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\beta} \sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\varepsilon \langle c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \qquad !$$