Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 32 — Spektraltheorem
Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} \ , \qquad [x, p]_- = i \ .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z = \mathrm{Sp}\exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H \rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H \rangle = \langle p \cdot p \rangle / 2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega \to 0} \omega G^{(-)}(\omega) = 2D \ ,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle\langle p; p \rangle\rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H \rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\eta^2 x^2 \qquad \text{mit } \eta \to 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta \neq 0$! (Dazu ist auch $\langle\langle x; p \rangle\rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D!

g) Berechnen Sie $\langle H \rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta \neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta \to 0} \langle H \rangle_\eta = \frac{1}{2} T \ !$$

Aufgabe 33 — Homogenität der Green-Funktion
Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t,t') = G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t-t') \ ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Aufgabe 34 — $1/\omega$-Entwicklung
Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle c_\alpha; c_\beta^\dagger \rangle\rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta}(U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta})\langle c_\gamma^\dagger c_\delta \rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ !$$