Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 28 — Wick-Theorem
Betrachten Sie ein System von Spin-1/2-Fermionen. Die Ein-Teilchen-ONB ist $\{|\alpha\rangle\} = \{|i\sigma\rangle\}$. Berechnen Sie für $i \neq j$ die freien Erwartungswerte

$$\langle n_{i\uparrow}n_{i\downarrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow}n_{j\uparrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow}n_{j\downarrow}\rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\sigma}n_{j\sigma'}n_{j\sigma''}\rangle^{(0)}$$

mit Hilfe des Wick-Theorems! Nehmen Sie dabei an, dass die Gesamtteilchenzahl und der Gesamtspin erhalten sind ($[\hat{N}, H_0]_- = 0$, $[S_z, H_0]_- = 0$)!

Aufgabe 29 — Auswertung der Spur mit kohärenten Zuständen
Gegeben ist ein System von Bosonen. A sei ein beliebiger Operator und $|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle$ ein kohärenter Zustand, $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie ($\varphi_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$):

$$\text{Sp}\, A = \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} \langle\varphi_1, ..., \varphi_d|A|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \quad !$$

Aufgabe 30 — Funkionalintegraldarstellung der Zustandssumme
a) Zeigen Sie für die Zustandssumme eines Bosesystems, dass

$$Z = \text{Sp}\, e^{-\beta\mathcal{H}} = \lim_{M\to\infty} \text{Sp}\,((\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M) \qquad (\varepsilon = \beta/M)$$

wobei $\mathcal{T}$ der Zeitordnungsoperator ist. Für Operatoren ohne Zeitabhängigkeit ordnet $\mathcal{T}$ Erzeuger stets links von Vernichtern an: $\mathcal{T}(c_\alpha c_\beta^\dagger) = +c_\beta^\dagger c_\alpha$ (Bosonen).

b) Zeigen Sie jetzt, dass

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} \langle\varphi_1, ..., \varphi_d|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle$$

bzw. nach trivialer Ergänzung des Index M:

$$Z = \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,M} dy_{\alpha,M}}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_{\alpha,M}^* \varphi_{\alpha,M}} \langle\varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M}|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M|\varphi_{1,M}, ..., \varphi_{d,M}\rangle$$

c) Schreiben Sie die Potenz aus, und fügen Sie $M-1$-mal die $\mathbf{1}$ ein,

$$(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})^M = \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}} \cdot \mathbf{1} \cdots \mathbf{1} \cdot \mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}}\,,$$

wobei die r-te Eins ($r = 1, ..., M-1$) durch kohärente Zustande $|\varphi_{1r}, ..., \varphi_{dr}\rangle$ dargestellt wird! Zeigen Sie damit, dass

$$\begin{aligned} Z \;=\; & \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{r=1}^{M}\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r} dy_{\alpha,r}}{\pi}\right) \times \\ & \left(\prod_{r=1}^{M} e^{-\sum_\alpha \varphi_{\alpha,r}^* \varphi_{\alpha,r}} \langle\varphi_{1,r}, ..., \varphi_{d,r}|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}})|\varphi_{1,r-1}, ..., \varphi_{d,r-1}\rangle\right)\,, \end{aligned}$$

wobei $\varphi_{\alpha,0} \equiv \varphi_{\alpha,M}$ definiert wird ("periodische Randbedingungen")!

d) Der Hamilton-Operator sei wie üblich durch

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha\beta}(t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta})c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma} c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\gamma c_\delta$$

gegeben, also eine Funktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{c^\dagger_\alpha, c_\alpha\})$ aller Erzeuger und Vernichter. Zeigen Sie, dass

$$\langle \varphi_{1,r}, ..., \varphi_{d,r}|(\mathcal{T}e^{-\varepsilon\mathcal{H}(\{c^\dagger_\alpha, c_\alpha\})})|\varphi_{1,r-1}, ..., \varphi_{d,r-1}\rangle = e^{-\varepsilon\mathcal{H}(\{\varphi^*_{\alpha,r}, \varphi_{\alpha,r-1}\})} e^{\sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,r}\varphi_{\alpha,r-1}}$$

unter Benutzung der Formel für das Skalarprodukt kohärenter Zustände!

e) Beweisen Sie jetzt:

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{M\to\infty} \int \left(\prod_{r=1}^{M} \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r}dy_{\alpha,r}}{\pi} \right) \times \\ & \exp\left(-\sum_r \sum_\alpha \varphi^*_{\alpha,r}(\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}) - \varepsilon \sum_r \mathcal{H}(\{\varphi^*_{\alpha,r}, \varphi_{\alpha,r-1}\}) \right) \end{aligned}$$

f) Führen Sie (im Limes $M \to \infty$) die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \tau_r &= \varepsilon r = \frac{\beta}{M} r \\ \varphi_\alpha(\tau_r) &= \varphi_{\alpha,r} \\ \frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_\alpha(\tau_r) &= \frac{\varphi_{\alpha,r} - \varphi_{\alpha,r-1}}{\varepsilon} \\ D[\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)] &= \prod_{r=1}^{M} \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_{\alpha,r}dy_{\alpha,r}}{\pi} \end{aligned}$$

und zeigen Sie damit die Funktionalintegraldarstellung von Z:

$$Z = \int D[\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)] e^{-S(\{\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)\})}$$

mit der Wirkung

$$S = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_\alpha \varphi^*_\alpha(\tau)(\partial/\partial\tau)\varphi_\alpha(\tau) + \mathcal{H}(\{\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)\}) \right)$$

Aufgabe 31 — Funktionalintegral für Bose-Gas
Berechnen Sie das Funktionalintegral

$$Z = \int D[\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)] e^{-S_0(\{\varphi^*_\alpha(\tau), \varphi_\alpha(\tau)\})}$$

für

$$S_0 = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_\alpha \varphi^*_\alpha(\tau)(\partial/\partial\tau)\varphi_\alpha(\tau) + \sum_\alpha (\varepsilon_\alpha - \mu)\varphi^*_\alpha(\tau)\varphi_\alpha(\tau) \right) ,$$

also für ein freies Bose-Gas! Gehen Sie dazu von der kontinuierlichen Darstellung ($\varphi_\alpha(\tau)$) zurück zur diskreten ($\varphi_{\alpha,r}$), und benutzen Sie die Formel

$$\int \left(\prod_{r=1}^{M} \frac{dx_r dy_r}{\pi} \right) \exp \left(- \sum_{r,s} (x_r - iy_r) S_{rs} (x_s + iy_s) \right) = \det \boldsymbol{S}^{-1}$$

für eine $2M$-dimensionale Gauß-Integration und eine beliebige M-dimensionale Matrix $\boldsymbol{S}$!