Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 26 — Jordan-Wigner-Transformation
Betrachten Sie das Heisenberg-Modell in einer Dimension

$$H = -J \sum_i \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{S}_{i+1}$$

mit lokalen Spins $\boldsymbol{S}_i$ auf den Plätzen $i = 1, ..., L$ einer Kette der Länge L und Austausch-Kopplung J zwischen nächsten Nachbarn. $\boldsymbol{S}_i$ sei jeweils ein Spin-1/2 (d.h. $\boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1) = 3/4$). Die Komponenten von Spins an verschiedenen Gitterplätzen $i \neq j$ kommutieren, für $i = j$ hat man die gewöhnliche Drehimpuls-Algebra:

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = iS_{iz} \qquad \text{etc.}$$

Mit der Jordan-Wigner-Transformation kann das Spin-1/2-System auf ein System von Fermionen abgebildet werden. Man definiert zunächst Erzeuger und Vernichter

$$a_i^\dagger = S_{ix} + iS_{iy} \,, \qquad a_i = S_{ix} - iS_{iy} \,.$$

a) Zeigen Sie, dass $[a_i, a_j]_- = 0$, $[a_i, a_j^\dagger]_- = 0$ für $i \neq j$ (wie Bosonen) und dass $[a_i, a_i]_+ = 0$, $[a_i, a_i^\dagger]_+ = 1$ (wie Fermionen)!

b) Geben Sie die Umkehrtransformation an! Wie muss S_{iz} durch a_i und $a_i^\dagger$ dargestellt werden?

c) Definieren Sie jetzt Erzeuger und Vernichter

$$c_i^\dagger = e^{-i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \; a_i^\dagger$$
$$c_i = e^{i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \; a_i \,,$$

und zeigen Sie, dass $[c_i, c_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}$ (also Fermionen)!

d) Zeigen Sie weiter:

$$\begin{aligned}
[e^{\pm i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j}, a_i]_- &= 0 \\
a_i^\dagger a_i &= c_i^\dagger c_i (= n_i) \\
e^{\pm i\pi n_i} c_i &= c_i \\
c_i^\dagger e^{\pm i\pi n_i} &= c_i^\dagger \\
[c_i, e^{\pm i\pi n_i}]_+ &= 0 \\
[c_i^\dagger, e^{\pm i\pi n_i}]_+ &= 0
\end{aligned}$$

e) Auf welches Modell wird das Heisenberg-Modell durch die Jordan-Wigner-Transformation $\boldsymbol{S}_i \mapsto c_i, c_i^\dagger$ abgebildet?

f) Warum funktioniert die Abbildung nur in einer Raumdimension?

Aufgabe 27 — Bogoliubov-Transformation
a) Begründen Sie die folgende Aussage:

Eine lineare Transformation bosonischer ($\varepsilon = +1$) bzw. fermionischer ($\varepsilon = -1$) Vernichter und Erzeuger $c_\alpha \mapsto d_\alpha$ mit

$$d_\alpha = \sum_\beta U_{\alpha\beta} c_\beta + \sum_\beta V_{\alpha\beta} c_\beta^\dagger \, ,$$

für die

$$[d_\alpha, d_\beta^\dagger]_{-\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta}$$

gilt, die also die fundamentalen (Anti-)Vertauschungsrelationen respektiert, definiert eine unitäre Transformation von Zuständen und Observablen.

b) Zeigen Sie, dass die komplexen Matrizen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ die Relationen

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\dagger - \varepsilon \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^\dagger = \mathbf{1}$$
$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T - \varepsilon \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^T = 0$$

erfüllen müssen, damit die Transformation unitär ist! Eine solche Transformation heißt Bogoliubov-Transformation.

c) Definiere die Matrix $\boldsymbol{M}$ als

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{V}^* & \boldsymbol{U}^* \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} c \\ c^\dagger \end{pmatrix} ,$$

wobei $c = (..., c_\alpha, ...)^T$, $c^\dagger = (..., c_\alpha^\dagger, ...)^T$, etc.!

d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{M}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}^\dagger = \boldsymbol{K}$, wobei

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

ist! Geben Sie $\boldsymbol{M}^{-1}$ an!

e) Zeigen Sie, dass das Hintereinanderausführen zweier Transformationen mit den Eigenschaften von b) wiederum eine Transformation vom Typ b) ist! (Bemerkung: Die Transformationsgruppe ist isomorph zur SO(2M) für Fermionen und zur Sp(2M) für Bosonen, d.h. zur Gruppe der reellen, orthogonalen, 2M-dimensionalen Matrizen mit Determinante 1 bzw. zur entsprechenden symplektischen Gruppe. M ist die Dimension des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums.)