Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 22 — Grundzustand des Heisenberg-Modells
Betrachten Sie das Spin-1/2-Heisenberg-Modell

$$H = \sum_{i,j=1}^{L} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{S}_j$$

mit ferromagnetischen Kopplungskonstanten, d.h. $J_{ij} \leq 0$ für alle (i,j).

Zeigen Sie, dass der voll polarisiert Zustand $|M_1, ..., M_L\rangle$ mit $M_i = 1/2$ für alle i ein Grundzustand ist!

Hinweis: Dazu ist nicht nur zu zeigen, dass der Zustand ein Eigenzustand von H ist, sondern auch, dass es keinen weiteren Eigenzustand mit geringerer Energie gibt. Letzteres ist zwar anschaulich klar, gefragt ist hier aber nach einem formalen Beweis.

Aufgabe 23 — Schwinger-Bosonen
a und b seinen bosonische Vernichter ("Schwinger-Bosonen"). Zeigen Sie, dass durch

$$S_+ = a^\dagger b \ , \quad S_- = b^\dagger a \ , \quad S_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$$

ein Spin definiert wird!

Weiter werde definiert:

$$|S, M\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^{S+M}}{\sqrt{(S+M)!}} \frac{\left(b^\dagger\right)^{S-M}}{\sqrt{(S-M)!}} |0\rangle$$

wobei $|0\rangle$ das Vakuum der Schwinger-Bosonen ist. Zeigen Sie, dass der Zustand $|S, M\rangle$ gemeinsamer Eigenzustand zu $\boldsymbol{S}^2$ und S_z mit Quantenzahlen S, M ist!

Welcher Unterraum des Schwinger-Bosonen-Fock-Raums ist der Hilbert-Raum eines Spins mit fester Quantenzahl S?

Aufgabe 24 — Kohärente Zustände
Gegeben ist ein System von Bosonen. Ein kohärenter Zustand $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^{(+)}$ ist ein gemeinsamer Eigenzustand aller Vernichter c_α:

$$c_\alpha |\varphi\rangle = \varphi_\alpha |\varphi\rangle$$

für $\alpha = 1, ..., d$ ($d = \dim \mathcal{H}_1$). Er kann daher durch die Eigenwerte $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$ charakterisiert werden.

a) Die Eigenwerte φ_α seien für $\alpha = 1, ..., d$ gegeben. Bestimmen Sie den zugehörigen kohärenten Zustand

$$|\varphi\rangle = \sum_{n_1,...,n_d} \varphi_{n_1,...,n_d} |n_1, ..., n_d\rangle^{(+)} ,$$

indem Sie die Koeffizienten $\varphi_{n_1,...,n_d}$ berechnen!
(Hinweis 1: Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung eine Gleichung für die Koeffizienten ab! Hinweis 2: Durch wiederholtes Anwenden von c_α erhält man letztlich den Vakuumzustand).

b) Normieren Sie den kohärenten Zustand!

c) Gibt es kohärente Zustände auch für Fermionen?

Aufgabe 25 — Kohärente Zustände – 2
Für beliebige $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathbb{C}$ sei durch

$$|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle = \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{d} \varphi_\alpha c_\alpha^\dagger\right) |0\rangle$$

ein Zustand definiert. d ist die Dimension des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums, $|0\rangle$ ist der Vakuumzustand. Betrachtet werde ein bosonisches System.

a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
c_\alpha |\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle &= \varphi_\alpha |\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \\
\langle \varphi_1, ..., \varphi_d | c_\alpha^\dagger &= \langle \varphi_1, ..., \varphi_d | \varphi_\alpha^* \\
c_\alpha^\dagger |\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle &= \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} |\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \\
\langle \varphi_1, ..., \varphi_d | c_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha^*} \langle \varphi_1, ..., \varphi_d |
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie:

$$\langle \varphi_1, ..., \varphi_d | \varphi_1', ..., \varphi_d' \rangle$$

c) Beweisen Sie:

$$\int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} |\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \langle \varphi_1, ..., \varphi_d| = \mathbf{1}$$

wobei $\varphi_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$ mit $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$, und die Integrale jeweils von $-\infty$ bis ∞ laufen!