Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 16 — Holstein-Primakoff-Transformation

Betrachten Sie die Holstein-Primakoff-Transformation, d.h. die folgende Darstellung für den lokalen Spin-Operator $\boldsymbol{S}_i$ durch Bosonen mit $[b_i, b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}$ ("Magnonen"):

$$\begin{aligned} S_{iz} &= S - b_i^\dagger b_i \\ S_{i+} &= \sqrt{2S}\,\sqrt{1 - b_i^\dagger b_i/(2S)}\; b_i \\ S_{i-} &= b_i^\dagger\,\sqrt{1 - b_i^\dagger b_i/(2S)}\,\sqrt{2S}\;. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Drehimpulsalgebra!
b) Zeigen Sie: $\boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1)$
c) Transformieren Sie für $T \to 0$ das Heisenberg-Modell auf ein Magnonengas!

Aufgabe 17 — Atomarer Limes

Gegeben ist das Hubbard-Modell im atomaren Limes,

$$H = \epsilon_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma}\hat{n}_{i-\sigma}\;.$$

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potenzial!

Welche Werte nimmt die Entropie (abhängig von den Modellparametern) in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ an?

Aufgabe 18 — Zwei-Platz-Hubbard-Modell

Gegeben ist das Hubbard-Modell für $L = 2$ Plätze:

$$H = \epsilon_0 \sum_\sigma (n_{1\sigma} + n_{2\sigma}) + t \sum_\sigma (c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma}) + U n_{1\sigma} n_{1-\sigma} + U n_{2\sigma} n_{2-\sigma}\;.$$

a) Konstruieren Sie die zu H gehörige Matrix in der Besetzungszahldarstellung! Nutzen Sie dabei aus, dass H blockdiagonal bezüglich der Teilchenzahl ist!

b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie E_0 für $N = 2$ Elektronen! Überprüfen Sie die Grenzfälle $U = 0$ und $t = 0$!

c) Entwickeln Sie die Grundzustandsenergie $E_0 = E_0(U)$ in $1/U$ und vergleichen Sie das Resultat in führender Ordnung in $1/U$ mit der Grundzustandsenergie des entsprechenden Zwei-Spin-Heisenberg-Modells!

d) Berechnen Sie jetzt sämtliche Eigenwerte von $\mathcal{H} = H - \mu\hat{N}$ und bestimmen Sie – in Abhängigkeit von μ – die Grundzustandsenergie von $\mathcal{H}$ und die jeweilige Teilchenzahl N.

e) Es sei $\mu = \epsilon_0 + U/2$. Bestimmen Sie die niedrigste Anregungsenergie von $\mathcal{H}$ und vergleichen Sie mit der niedrigsten Anregungsenergie des Zwei-Spin-Heisenberg-Modells für $U \to \infty$!

f) Welche niedrigste Anregung ergibt sich für $\mu = 0$?

Aufgabe 19 — Hermitescher Hamilton-Operator
Gegeben ist der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\gamma c_\delta \ .$$

Was folgt für die (i.allg. komplexen) Matrixelemente $t_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ aus der Forderung nach Hermitizität: $H = H^\dagger$? Beweisen Sie Ihre Aussagen!

Aufgabe 20 — Vakuumfluktuationen
Geben Sie einen Operator (in zweiter Quantisierung) an, dessen Vakuumerwartungswert verschwindet ($\langle A \rangle_v = \langle 0|A|0\rangle = 0$), der aber eine endliche Fluktuation

$$\langle (A - \langle A \rangle_v)^2 \rangle_v > 0$$

im Vakuumzustand aufweist!

Aufgabe 21 — Teilchen identisch mit Loch
$\{|\alpha\rangle\}$ sei eine Ein-Teilchen-ONB. Wie muss man Erzeuger und Vernichter $\gamma_\alpha^\dagger$ bzw. γ_α definieren, so dass die folgenden Eigenschaften gelten?

$$\begin{aligned} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta^\dagger]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \\ \gamma_\alpha^\dagger &= \gamma_\alpha \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass unter diesen Umständen $\gamma_\alpha^2 = 1/2$!

Es sei $\alpha = (i, \sigma)$. Kann man sinnvollerweise einen lokalen Spin $S_{i,r} = (1/2) \sum_{\sigma\sigma'} \gamma_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'}^{(r)} \gamma_{i\sigma'}$ definieren ($r = x, y, z$)?